21 世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材

结构力学简明教程

主　编　张系斌
副主编　陈月顺　焦　箭
参　编　甘元初　于艳丽



内 容 提 要

《结构力学简明教程》是中少学时教材，依据教育部非力学专业教学指导委员会结构力学和弹性力学课程指导小组2004年福州会议通过的“结构力学课程教学基本要求（B类）”的内容进行编写。全书共八章，内容包括：绪论，体系的几何组成分析，静定结构受力分析，静定结构位移计算，力法，位移法，力矩分配法，影响线及其应用。本书内容精练，思路清晰，说理透彻，联系实际，文字洗练，在注重基本概念、注重培养能力，希望能够既节省授课学时，又不降低课程的基本要求。可作为除四年制土建，水利，道桥等专业以外其它专业的教材，也可供其他有关专业和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学简明教程/张系斌主编. —北京：北京大学出版社，2006.1
(21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材)
ISBN 7-301-10520-7

Ⅰ.结…　Ⅱ.①张…②章…　Ⅲ. 结构力学—高等学校—教材　Ⅳ. 0324

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第005881号

书　　名：结构力学简明教程
著作责任者：张系斌　主　编
策 划 编 辑：吴　迪　李昱涛
责 任 编 辑：徐　凡
标 准 书 号：ISBN 7-301-10520-7/TU・0038
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn，http://www.pup6.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667
电 子 信 箱：pup_6@163.com
排　版　者：北京东方人华北大彩印中心　　电话：62754190
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×980毫米　16开本　13印张　300千字
2006年1月第1版　2006年1月第1次印刷
定　　价：20.00元

《21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材》

专家编审委员会

21世纪全国应用型本科土木建筑系列实用规划教材

参编学校名单（按拼音排序，覆盖26个省市自治区）

1 安徽理工大学
2 北京建筑工程学院
3 北京联合大学
4 长春工程学院
5 长江大学
6 长沙理工大学
7 东南大学
8 广州大学
9 贵州大学
10 桂林工学院
11 合肥工业大学
12 河北工业大学
13 河北建筑工程学院
14 河南大学
15 黑龙江科技学院
16 湖南城市学院
17 湖南大学
18 湖南工程学院
19 湖南工学院
20 湖南科技大学
21 华北电力大学
22 华北水利水电学院
23 华东交通大学
24 华中科技大学
25 淮阴工学院
26 黄石理工学院
27 江汉大学
28 江苏大学
29 江西科技师范学院
30 九江学院
31 昆明理工大学
32 丽水学院
33 辽宁工程技术大学
34 内蒙古科技大学
35 南昌工程学院
36 南昌航空工业学院
37 南华大学
38 南京工程学院
39 南京林业大学
40 南阳理工学院
41 宁波工程学院
42 三峡大学
43 山东交通学院
44 山西大学

45 上海大学

46 石河子大学

47 石家庄铁道学院

48 四川理工学院

49 太原理工大学

50 天津工业大学

51 天津商学院

52 武汉大学

53 武汉工程大学

54 武汉工业学院

55 武汉科技大学

56 武汉科技学院

57 武汉理工大学

58 西安建筑科技大学

59 西安科技大学

60 西北农林科技大学

61 西南交通大学

62 西南林学院

63 湘潭大学

64 孝感学院

65 浙江科技学院

66 中国地质大学

67 中南大学

68 中南林学院

69 重庆大学

70 株洲工学院

第 1 章　绪　　论

教学提示：本章学习的主要内容是结构力学的研究对象和任务、结构的分类和研究方法；讨论结构计算简图的简化原则、结点和支座的简化方法，给出了杆件结构的分类和荷载的分类。

教学要求：学生应熟悉结构力学的研究对象和任务。了解结构计算简图的简化原则及简化要点，能合理对支座和结点进行简化，并能针对具体情况进行具体分析，熟练地画出物体的计算简图。了解杆件结构的分类，荷载的分类。

1.1　结构力学的研究对象和任务

1.1.1　结构和结构的分类

在工程中，能承受荷载起到骨架作用的物体或体系称为结构。例如工业与民用建筑中的桥梁体系、工业厂房、公路桥梁、铁路上的桥梁、立交桥等。结构按几何尺度可分为杆件结构、板壳结构和实体结构等 3 类，按长度 l、宽度 b 及厚度 h 来考虑，$l>>b$，$l>>h$ 为杆件结构，$h<<l$，$h<<b$ 为板壳结构，$l \sim b \sim h$ 为实体结构。

1.1.2　结构力学的任务和研究方法

结构力学作为力学的一个分支，其研究对象甚广。本书仅限于由杆件所组成的平面体系，即平面结构。以此为对象的结构力学称为杆系结构力学，也称为经典结构力学。

结构力学讨论的问题有以下 4 方面：

(1) 结构的计算简图的合理选择和杆件结构的组成规律。

(2) 结构的受力性能和合理的结构形式。

(3) 在各种因素作用下结构的静力分析和变形计算。

(4) 结构的动力性能和稳定问题(本教材未涉及)。

结构力学有各种计算方法，但都必须满足以下 3 个基本条件：

(1) 力系的平衡条件。结构的整体或结构的一部分(如一部分杆件、杆件的一部分及杆件的结点等)都应满足力系的平衡条件。

(2) 变形连续条件。一方面是指结构的杆件发生各种变形后仍是连续的，没有重叠或缝隙；另一方面指结构发生变形和位移后，仍应满足结构的支座和结点的约束条件。

(3) 物理条件。即把结构的应力和应变通过物理方程联系起来，如轴向应力和轴向应变、剪切应力和剪切应变、弯曲应力和弯曲应变之间都应满足相应的物理方程。

1.2 计 算 简 图

1.2.1 结构的简化原则

实际结构是很复杂的，在计算时不可能采用实际结构，在结构力学的计算中一般采用一个简化的计算图形代替实际结构。简化的计算图形称为计算简图，计算简图的选择原则如下。

(1) 反映结构的实际及主要性能。因此，选择计算简图以前，应搞清结构杆之间或杆件与基础之间实际连接构造，以保证计算的可靠性和必要的精确性。

(2) 略去细节、便于计算。结构的实际构造是很复杂的，必须分清主次，略去次要因素。

因此，选取计算简图是结构受力分析的基础，是非常重要的。初学者应对一般结构计算简图的选取有初步的了解；重点应对结构杆件之间连接的结点和杆件与基础连接的支座的主要计算简图有基本的了解。

1.2.2 结点和支座的简化

1. 结点的简化

铰结点的机动特征是各杆之间不能相对移动，可以绕铰结点作自由转动。受力特征能承受和传递力，不能承受和传递力矩，如图 1.1(a)、图 1.1(b)所示。

刚结点的机动特征是各杆之间不能相对移动，也不能相对转动。受力特征是能承受和传递力，也能承受和传递力矩，如图 1.1(c)所示。

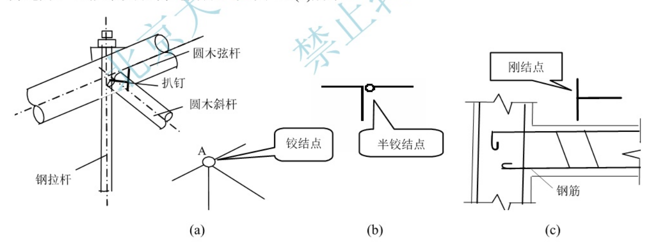


图 1.1 结点的简化

2. 支座的计算简图

辊轴支座　机动特征是杆端可以绕 A 点转动，且可沿以 B 为圆心 AB 为半径圆弧微小移动，但不能有竖向移动。支座反力特征是没有反力矩，没有水平支座反力。有竖向支座反力。如图 1.2(a)所示。

铰支座　机动特征是杆端可以绕铰中心 A 转动，不能有水平方向和竖直方向移动。支座反力特征是没有反力矩，有水平方向和竖直方向支座反力。如图 1.2(b)所示。

固定支座　机动特征是杆端的水平方向移动、竖直方向移动和转动都受到限制。支座反力特征是有水平方向、竖直方向支座反力和反力偶。如图 1.2(c)所示。

定向支座　机动特征是杆端的竖直方向移动和转动都受到限制。支座反力特征是有竖直方向支座反力和反力偶。如图 1.2(d)所示。

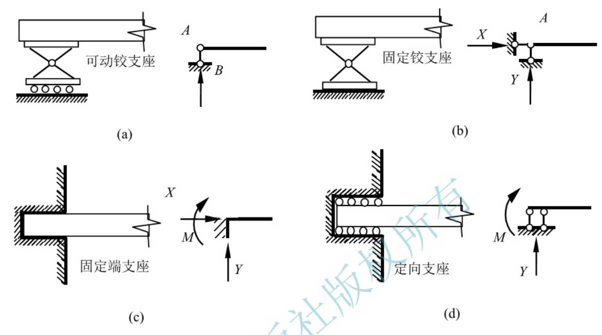


图 1.2　支座的简化

由以上结点和支座的机动特征和受力分析可以看出，约束的机动特征和受力分析是紧密相应的。凡是结点或支座沿某一方向的位移或运动受到约束时，则结点或支座具有该方向的约束力；凡结点或支座沿某一方向可以自由位移或运动时，则它们沿该方向的约束力为零。

1.2.3　杆件结构的分类

1. 常用杆件结构的类型

(1)　梁的组成特点是轴线通常为直线。受力特点是在竖向荷载下无水平支座反力，内力有弯矩、剪力，如图 1.3(a)所示。

(2)　拱的组成特点是轴线为曲线。受力特点是在竖向荷载下有水平支座反力，内力有弯矩及剪力及轴力，如图 1.3(b)所示。

(3)　刚架的组成特点是由梁、柱直杆用刚结点组成。受力特点是内力有弯矩、剪力、轴力，以弯矩为主，如图 1.3(c)所示。

(4)　桁架的组成特点是由两端为铰的直链杆用铰结点组。受力特点是荷载作用于结点时，各杆只受轴力，如图 1.3(d)所示。

(5)　组合结构的组成特点是由梁式杆和链杆组成。受力特点是梁式杆有弯矩、剪力、轴力，链杆只受轴力，如图 1.3(e)所示。

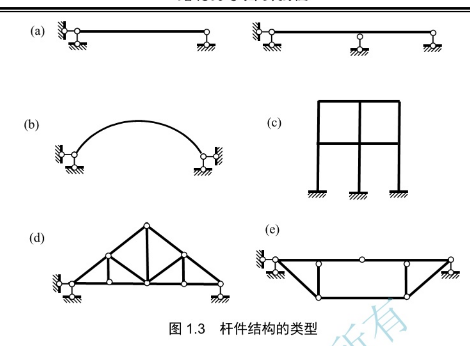


图 1.3　杆件结构的类型

2. 计算特点的分类

(1) 静定结构：用静力平衡条件可以唯一确定全部支座反力和内力。

(2) 超静定结构：不能由静力平衡条件确定全部支座反力和内力。

3. 根据杆件和荷载在空间位置的分类

(1) 平面结构：各杆件的轴线和荷载都在同一平面内。

(2) 空间结构：各杆件的轴线和荷载其中之一不在同一平面内。

1.2.4　荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力。

根据作用时间的久暂，可分为以下几种。

(1) 恒载(不变荷载)：永久作用于结构上，如结构自重、固定设备重量。

(2)　活载(可变荷载)：又分为可动荷载和移动荷载。可动荷载能作用于结构上的任意位置，如人群、雪载、风载；移动荷载互相平行、间距不变、能在结构上移动，如列车荷载、吊车荷载。

根据荷载作用的性质，可分为以下几种。

(1) 静力荷载：荷载的大小、方向和位置不随时间变化的荷载(包括只考虑位置改变、不考虑动力效应的荷载)，对结构不产生显著的振动。如恒载、活载。

(2)　动力荷载：荷载随时间迅速变化的荷载，对结构产生显著的振动。如机械转动时的荷载、地震作用、冲击波。

如图 1.4(a)所示为一工业厂房结构图。该厂是钢筋混凝土厂房结构，梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内，然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内柱与梁组成排架，如图 1.4(b)所示，各个排架之间，在梁上有屋面板连接，在柱的牛腿上有吊车梁连接。计算上述的厂房结构时，可采用图 1.4(c)所示的计算简图。

该厂房是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空间结构，但各排架在纵向以一定

的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载，如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的，通常可把这些荷载分配给每个排架，而将每一排架看作一个独立的体系 ，于是该厂房结构就由纵向构件组成的空间结构简化为由一系列屋架、柱和基础组成的平面单元，如图 1.4(b)所示。另外，梁和柱都可用它们的几何轴线来代表，是因为梁和柱的截面尺寸比长度小得多，轴线都可近似地看作是直线。另外梁和柱的连接只依靠预埋钢板焊接，梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动，但仍有发生微小相对转动的可能，因此可取为绞结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动，因此柱底可取为固定端。如图 1.4(c)所示的结构称为铰结排架，是单层工业厂房常用的一种结构型式。

从以上分析可知，简化采用了以下的作法。

(1) 屋架的杆件(梁和柱)用轴线表示。

(2) 屋架杆件之间的结点简化为铰结点。

(3) 屋面荷载通过屋面板的 4 个角点以集中力的形式作用在屋架弦上。

(4) 屋架的两端通过钢板焊接在柱上，可将其端点分别简化为铰支座和滚轴支座。

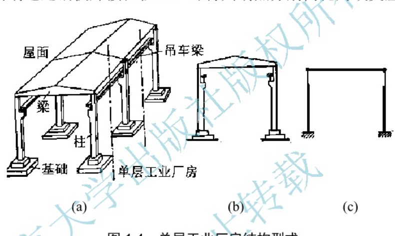


图 1.4　单层工业厂房结构型式

结构计算简图的选择十分重要，又很复杂；需要选择者有较多的实际经验，并善于判断各种不同因素的相对重要性。对一些新型结构，往往要通过多次的实验和实践，才能获得比较合理的计算简图；但对常用的结构形式，已有前人积累的经验，可以直接取其常用的计算简图。所以，选择结构计算简图的能力是在本课程、后继结构课程以及长期工程实践中逐步形成的。

第 2 章　几何组成分析

教学提示：本章研究的主要内容是体系的几何方面的问题。杆件体系是由若干杆件及地基用链杆、铰或刚结点连接而成的。本章对平面杆系的几何组成进行分析，以解决怎样组成的杆系才能承受荷载这个基本问题。同时，由于结构的组成方式不同将影响其力学性能和分析方法，因此，在分析结构受力、变形之前，也必须首先了解结构的组成。

教学要求：本章让学生了解几何组成分析的目的，重点掌握以下基本概念：几何不变体、几何可变体、自由度、约束、瞬铰、必要约束、多余约束、静定结构和超静定结构；理解几何不变无多余约束的平面杆件体系的基本组成规律。并能够熟练地运用组成规律分析各种复杂的杆件体系。

2.1　概述与名词解释

实际工程结构中，杆件结构一般是由若干根杆件通过结点间的连接及与支座的连接组成的。结构是用来承受荷载的，首先必须保证结构的几何构造是合理的，即它本身应该是稳固的，可以保持几何形状的稳定。一个几何不稳固的结构是不能承受荷载的。例如图2.1(a)所示结构由于内部的组成不健全，尽管只受到很小的扰动，结构也会引起很大的形状改变。

对结构的几何组成教学分析称为几何组成分析。其目的在于：判断结构有无保持自身形状和位置的能力；研究几何不变体系的组成规律；为区分静定结构和超静定结构及进行结构内力分析打下必要的基础。

在对结构进行几何组成分析之前，先介绍几个名词。

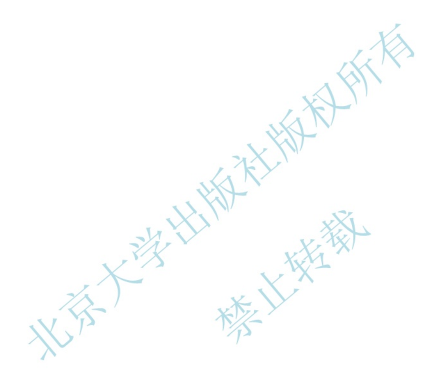
1. 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构在不计材料应变的条件下，杆系的形状和位置保持不变，称为几何不变体系(图 2.1(a))。反之，称为几何可变体系(图 2.1(b))。

显然只有几何不变体系可作为结构，而几何可变体系是不可以作为结构的。因此在选择或组成一个结构时必须掌握几何不变体系的组成规律。

(a) 几何可变体系　　　　(b) 几何不变体系

图 2.1



2. 自由度 S

判断一个体系是否可变，涉及到体系运动的自由度问题。物体或体系运动时，彼此可以独立改变的几何参数的个数，称为该物体或体系的自由度。换句话说，一个物体或体系的自由度就是它运动时可以独立改变的坐标个数。

(1) 点的自由度。

点在平面内的自由度为 S=2：(x，y)，图 2.2 为点的自由度。

(2) 刚片的自由度。

所谓刚片，就是几何形状不变的部分。由于我们在讨论体系的几何构造时是不考虑材料变形，因此可以把一根梁、一根柱、一根链杆甚至体系中已被确定为几何不变的部分看作是一个刚片，图 2.3 所示为一平面内刚片。

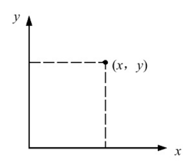


图 2.2　平面内点的自由度

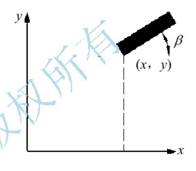


图 2.3　平面内刚片的自由度

刚片在平面内的自由度为 S=3：(x，y，β)。

3. 约束

约束是指限制物体或体系运动的各种装置，分外部约束(体系与基础之间的联系，即支座)和内部约束(体系内部各杆或结点之间的联系)两种。由于结构是由各种构件通过约束组合成不变体系的，它的自由度应该等于或小于零，所以约束也是能减少刚片自由度的装置。常见的约束装置的类型有下列几种。

(1) 链杆。

链杆可减少一个自由度，相当于一个约束，如图 2.4 所示。

图 2.4　链杆约束

(2) 单铰。

一个单铰可以减少两个自由度，相当于两个约束，如图 2.5 所示。

图 2.5　单铰约束

(3) 复铰。

所谓复铰，是指连接两个以上刚片的铰，如图 2.6 所示。

连接 n 个刚片的复铰，相当于 $n-1$ 个单铰。

(4) 刚结点。

一个刚结点能减少 3 个自由度，相当于 3 个约束，如图 2.7 所示。



图 2.6　复铰约束　　　　图 2.7　刚结点

4. 必要约束和多余约束

所谓必要约束，是指保证体系几何不变所需的最少的、合理约束；相反，必要约束以外的约束就称为多余约束。多余约束不改变体系的自由度。

5. 瞬变体系

瞬变体系指原来是几何可变，经微小位移后又成为几何不变的体系。图 2.8 所示两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆联结，它是几何可变的。刚片Ⅰ相对刚片Ⅱ发生一个微小的位移 Δ 后，$\beta_1 = \dfrac{\Delta}{L_1}$，$\beta_2 = \dfrac{\Delta}{L_2}$，$\beta_3 = \dfrac{\Delta}{L_3}$

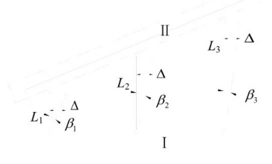


图 2.8　瞬变体系

由于 $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$，也就是说当两刚片发生了微小的相对运动后，3 根链杆就不再平行

了，也不交于一点，故体系就变成了不可变体系。这种在短暂的瞬间是几何可变的体系称为瞬变体系。瞬变体系的几种情况如下。

(1) 两个刚片用 3 根互相平行但不等长的链杆联结，如图 2.8 所示。

如果 3 根链杆互相平行又等长，体系是可变的，如图 2.9 所示。

图 2.9　几何可变体系

(2) 两个刚片用 3 根其延长线交于一点的链杆联结。

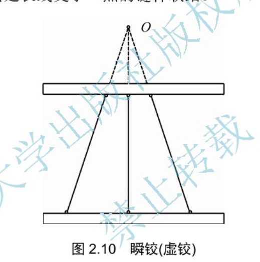


图 2.10　瞬铰(虚铰)

图 2.10 中 3 根链杆的延长线交于点“O”，两刚片在瞬间就会发生绕“O”点的相对转动，但是在短暂的运动发生以后，3 根链杆的延长线不再交于一点，体系就变成了不可变体系。“O”称为虚铰或瞬铰。如果 3 根链杆直接交于点“O”，则组成的是可变体系，如图 2.11 所示。此时“O”称为实铰。

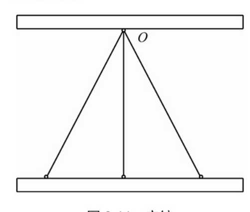


图 2.11　实铰

(3) 3 个刚片用 3 个在一条直线上的铰两两联结。

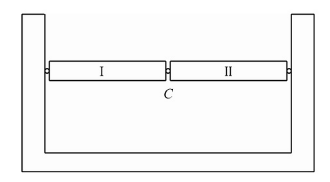


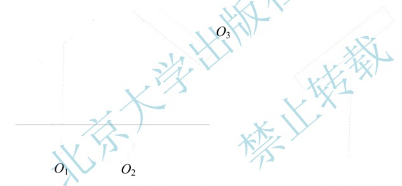
图 2.12　瞬变体系

图 2.12 中，在 C 点两刚片(Ⅰ 、 Ⅱ)有共同的运动趋势，因此它们可沿公共切线做微小的运动，但运动以后，3 个铰就不再共线，体系变成了不可变体系。

(4) 3 个刚片用 3 对链杆联结情况。

① 一对链杆平行。

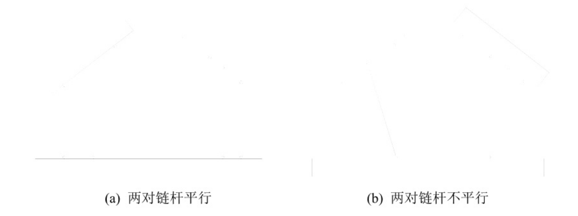
图 2.13(a)中，两虚铰(O_1、O_2)的连线与组成无穷远铰(O_3)的两链杆平行，体系是瞬变的。若两虚铰变成两实铰，如图 2.13(b)所示，且连线与组成无穷远铰的链杆平行，体系也是瞬变的。若两虚铰的连线与组成无穷远铰的链杆不平行，体系是不变的。



(a) 两虚铰连线与组成无穷远铰两链杆平行　　(b) 两实铰连线与组成无穷远铰两链杆平行

图 2.13　一对链杆平行

② 两对链杆平行。



(a) 两对链杆平行　　(b) 两对链杆不平行

图 2.14　两对链杆平行

组成无穷远铰的两对链杆互相平行，体系是瞬变的，如图 2.14(a)所示。组成无穷远铰的两对链杆互相不平行，体系是几何不变的，如图 2.14(b)所示。若组成无穷远铰的两对链杆互相平行又等长，体系是可变的。

③ 3 对链杆都平行。

图 2.15 所示结构中，组成体系中 3 个瞬铰的 3 对链杆两两平行，所组成的结构体系是瞬变的。

尽管瞬变体系在经过微小的位移后可以变成几何不变体系，但瞬变体系不能作为结构使用，如图 2.16 所示结构为一瞬变体系。

图 2.15　三对链杆都平行

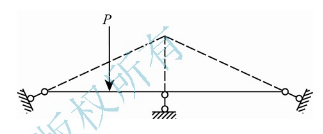


图 2.16　瞬变体系 1

由静力平衡条件：

$$\sum X=0 \qquad R_A=R_C \tag{2-1}$$

$$\sum M_A=0 \qquad R_BL+R_Ch=Pa \tag{2-2}$$

$$\sum M_C=0 \qquad R_BL+R_Ah=Pb \tag{2-3}$$

其中 R_A、R_B 和 R_C 分别为 A、B 和 C 支座的支座反力由式(2-2)式(2-3)得：$R_A\neq R_C$，与式(2-1)矛盾，因此无解。这是因为瞬变体系在图示状态是可变的，因此不能运用平衡原理。再看一个例子，如图 2.17 所示为一瞬变体系，经过微小的位移 δ 后，变成几何不变体系。

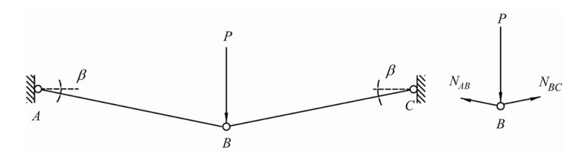


图 2.17　瞬变体系 2

取 C 结点研究，由静力平衡条件：

$$\sum Y=0 \qquad 2N_{CA}\sin\beta=P$$

得到：

$$N_{CA}=\frac{P}{2\sin\beta}$$

若 β 很小，N_{CA} 就趋向无穷大。由此可以看出，瞬变体系是不能作为结构使用的。



2.2　体系的计算自由度

为了能对结构的几何组成分析进行量化，引入计算自由度 W 的概念。在给出计算自由度 W 的定义前，先给出计算自由度 S 的算法。假设结构体系中约束都不存在，各构件的自由度综合为 a；再确定结构体系的必要约束个数为 c，则结构体系的自由度 S 为：

$$S = a - c \tag{2-4}$$

在使用式(2-4)前必须区分必要约束和多余约束，这个问题往往很困难。为了回避这个困难，构造新的参数计算自由度 W：

$$W = a - d \tag{2-5}$$

式中，d 全部约束个数，避免了研究哪些约束是多余约束 m 的难题。

由于多余约束和必要约束的和就是全部约束，所以有

$$S - W = m \tag{2-6}$$

式(2-6)就是计算自由度 W、自由度 S，多余约束 m 3 者之间的关系。下面由式(2-5)导出 W 的两种具体算法。

(1) 把结构体系看成是由刚片受约束而组成的。

以 p 表示体系中刚片的个数，则刚片的总自由度为 $3p$。以 g 代表单刚节点的个数(复约束应事先拆成单约束)，h 代表单铰节点个数，b 代表单链杆个数，则总的约束个数为 $3g+2h+b$。体系的计算自由度 W 为：

$$W = 3p - (3g + 2h + b) \tag{2-7}$$

(2) 把体系看成节点受链杆的约束而组成的。

以 j 代表节点个数，b 代表单链杆个数，则体系的计算自由度 W 为：

$$W = 2j - b \tag{2-8}$$

由式(2-7)、式(2-8)算出的 W 值可能为正、负或零。所以根据算出的 W 值还不能得出自由度 S 和多余约束 m 的确切值，但可以得出它们的差值 $S - m = W$，也可以得出 S 和 m 的下限值，从而得出以下定性结论，见表 2-1。

表 2-1

W的数值	几何组成性质
$W>0$	体系是几何可变的
$W=0$	若无多余约束则为几何不变；如有多余约束则为几何可变
$W<0$	体系有多余约束。若为体系几何不变，则为超静定结构

【例 2-1】　计算图 2.18 所示结构的计算自由度。

解：把图 2.18(a)所示体系的全部支座去掉以后，剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面 G 处切开，这样才变为无多余约束的刚片，如图 2.18(b)所示。按式(2-7)计算，刚片数 $p=1$，链杆个数 $b=4$，铰结数 $h=0$，A、B、G　3 处的单刚结数 $g=3$，因此，$W = 3p - (3g + 2h + b) = 3\times1 - (3\times3 + 2\times0 + 4) = -10$，由于这个体系是几何不变的，故自由度为零，因此，由式(2-6)可以求出多余约束数 m 如下。

$$m = S - W = 0 - (-10) = 10$$

这是一个具有 10 个多余约束的几何不变体系。

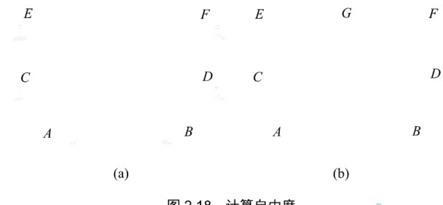


图 2.18　计算自由度

2.3　平面几何不变体系的基本组成规则

本节讨论无多余约束的几何不变体系的组成规则，它是几何组成分析的基础。

1. 1 **个点与** 1 **个刚片之间的联结方式**(图 2.19)

规律 1：1 个刚片与 1 个点用两根链杆相连，且 3 个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且没有多余约束。

将图 2.20 所示的部分称为二元体，则以上规律还可以这样叙述：在 1 个刚片上加上 1 个二元体，仍为无多余约束的几何不变体系。即在一个体系上加上或去掉 1 个二元体，是不会改变体系原来性质的。这一规律称为二元体法则。

图 2.19　点与刚片联结　　　　图 2.20　二元体

利用以上规律，可以组成所需的不变体系，如图 2.21 所示。

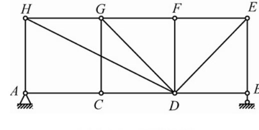


图 2.21　不变体系

2. 2 个刚片之间的联结方式

在图 2.19 的基础上，将一根链杆看做刚片，如图 2.22 所示。这时二者在几何组成性质上是等价的，即图 2.22 所示结构也是无多余约束的几何不变体系。于是，我们可以得到以下规律。

规律 2：2 个刚片用一个铰和一根链杆相联结，且 3 个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且无多余约束。这一规律称为两刚片法则。

(3) 3 个刚片之间的联结方式

在图 2.19 的基础上，将其中的两根链杆均看作刚片，如图 2.23 所示。这时它仍然是无多余约束的几何不变体系。于是，我们可以得到以下规律。

规律 3：3 个刚片用 3 个铰两两相连，且 3 个铰不在一条直线上，则组成几何不变体系，并且无多余约束。这一规律称为三刚片法则。

以上 3 条规律实际上可以归纳为一个基本规律：三角形规律即如果三个铰不共线，则一个铰结三角形的形状是不变的，而且没有多余约束。



图 2.22　　图 2.23

前面说过：一根链杆相当于一个约束，一个单铰相当于两个约束，因此一个单铰可以用两根链杆来代替。于是，图 2.22 和图 2.24 中的结构在几何组成性质上是等价的。因此两刚片法则又可以描述如下。

O

图 2.24

规律 4：2 个刚片用 3 根不交于一点的链杆相连，则组成几何不变体系，并且无多余约束。

2.4　平面体系几何组成分析示例

利用以上规律，我们可以组成各种各样的几何不变体系，也可以对已组成的体系进行

几何构造分析。



1. 组装几何不变体系

(1) 从基础出发进行组装。

把基础作为一个刚片，然后运用各条规律把基础和其它构件组装成一个不变体系。

【例 2-2】 分析下列结构的几何组成性质，如图 2.25(a)所示。

图 2.25(a)中基础为几何不变部分，可把它看做刚片，在此基础上一次加上二元片，由二元片法则，体系为无多余约束几何不变体系，如 2.25(b)所示。

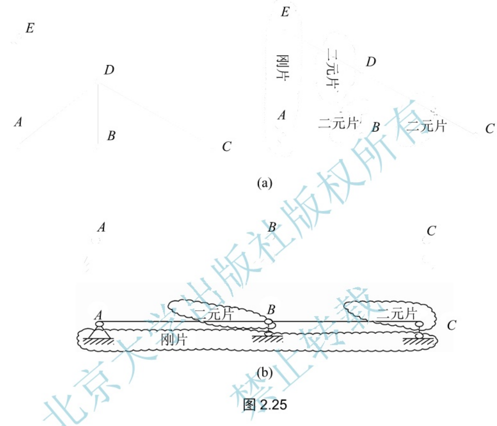


图 2.25

(2) 从上部体系出发进行组装。

先运用各条规律把上部结构组装成一个几何不变体系，然后运用规律 4 把它与基础相连。

【例 2-3】 分析图 2.26 所示结构的几何组成性质。

将图 2.26(a)中的铰接三角形 ABG、CED 看作刚片，两刚片由铰 F 和链杆 BC 联结，由于 BC 不通过铰 F，由两刚片法则，上部结构为无多余约束几何不变体系，将其看作刚片，另外将基础看作刚片，则由两刚片法则，整体结构为无多余约束几何不变体系。

将图 2.26(b)中的铰接三角形 ACD、BEF 看作刚片，两刚片由不交于同一点的三根链杆 AF、ED 和 BC 联结，由规律 4，上部结构为无多余约束几何不变体系。将其看作刚片Ⅰ，将基础看作刚片Ⅱ，两刚片由铰支座 A 和不通过 A 的链杆支座 B 联结，由两刚片法则，整体结构为无多余约束几何不变体系。

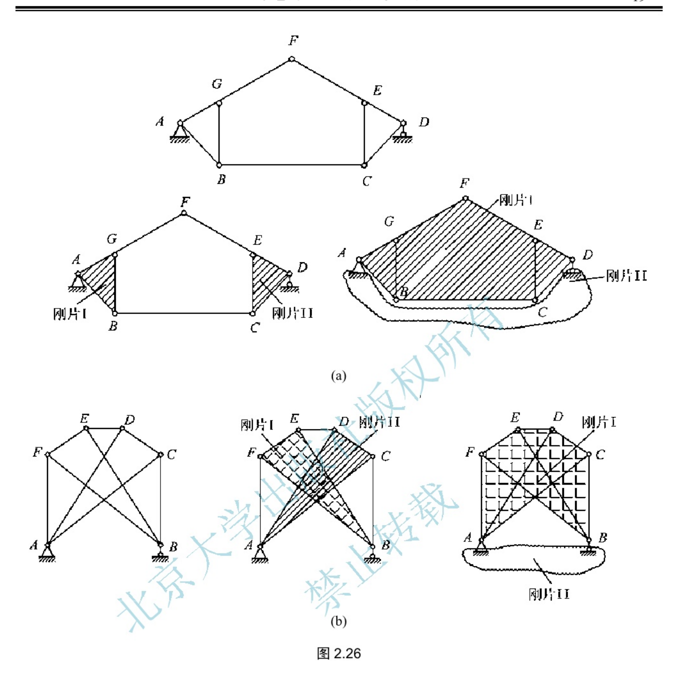


图 2.26

2.5　体系的几何构造与静定性

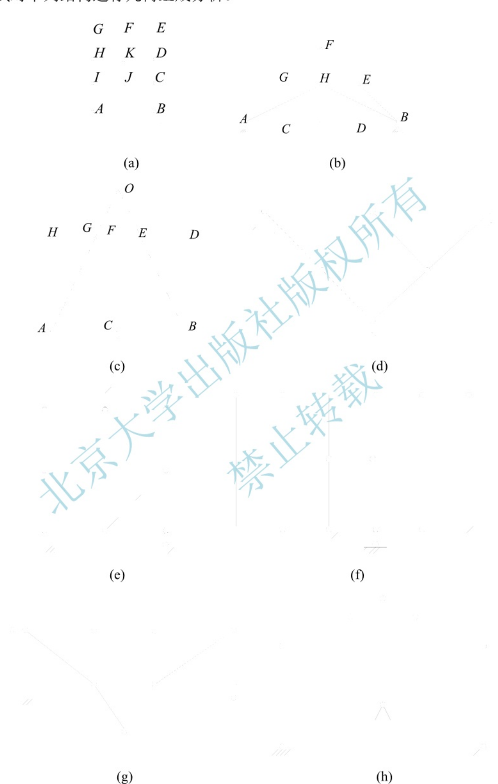
作为实际工程中的结构体系，其几何组成必须是几何不变的。而从上节的例题中可知，几何不变体系又可分为无多余约束的和有多余约束的体系。有多余约束几何不变体系中的约束除了满足几何不变性的要求外，还有多余的。

对于无多余约束的几何不变体系，结构的全部支座反力和内力都可由静力平衡条件求得，且为唯一解，这类结构称为静定结构。

对于有多余约束的几何不变体系，由于多余约束的存在，结构中的未知力的个数超过了静力平衡方程分个数，所以此类结构的反力和内力不能由静力平衡条件全部求出，必须补充其他条件才能求出所有反力和内力，比如补充变形协调条件。这类结构称为超静定结构。

2.6 习　　题

1. 试对下列结构进行几何组成分析。



(a)　(b)

(c)　(d)

(e)　(f)

(g)　(h)

2. 计算上题中图示体系的自由度。

第 3 章　静定结构的内力计算

教学提示：本章结合几种典型结构型式讨论静定结构的受力分析问题，涉及静定平面梁、静定平面刚架、静定平面桁架、拱、组合结构等。内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制、受力性能的分析。静定结构的受力分析，主要是确定各类结构由荷载所引起的内力和相应的内力图。本章将在理论力学的受力分析和材料力学的内力分析的基础上，主要是应用结点法、截面法和内力与荷载之间的微分关系来计算静定平面梁、静定平面刚架、静定平面桁架、拱、组合结构，内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制、各种结构受力性能的分析。

教学要求：本章让学生掌握轴力、弯矩和剪力的概念及其正负号的规定；能灵活运用结点法、截面法和内力与荷载之间的微分关系计算静定结构的支座反力和各截面内力并绘制内力图；理解不同结构的受力特性。

3.1　单跨静定梁

静定结构就是无多余约束的几何不变体系。全部支座反力和内力都可用静力平衡方程求出，且解答是唯一的。

平面结构的任一杆件的截面一般有 3 种内力：轴力 N、剪力 V、弯矩 M。二力杆(链杆)只有轴力。其正负号规定如下，如图 3.1 所示。

轴力：以受拉为正，截面的外法线方向画出。

剪力：以绕隔离体顺时针方向为正，截面的切线方向画出。

弯矩：不规定正负号，其值画在杆件受拉纤维一侧。

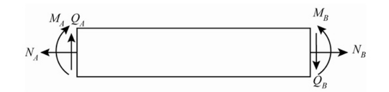


图 3.1　平面结构内力及其正方向约定

3.1.1　截面法求指定截面的内力

截面法是求解结构内力的基本方法，即将杆件在指定截面切开(图 3.2)，取其中任一部分为研究对象，利用静力平衡条件，确定截面的 3 个内力分量。用截面法取研究对象时应注意如下问题。

(1) 与研究对象(隔离体)相连接的所有约束都要切断，并以相适应的约束力代替。

(2) 不可遗漏作用于研究对象上的力，包括荷载、约束力(内力和支反力)。

(3)　对于未知力，总是假定为其正方向，如果求出的结果为正值，说明实际作用方向与假设方向相同，如果其值为负，则说明实际作用方向与假设相反。

(4) 在利用平衡方程时，尽量避免解联立方程。

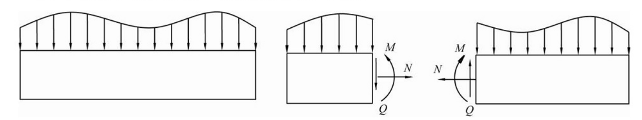


图 3.2　截面法研究对象及内力表达

内力求出后，用内力图直观明了地表示杆各截面的内力变化，直观明了。作图时，把内力的大小按一定的比例尺，以垂直于杆轴的方向标出，且规定：剪力和轴力画在杆的任一侧，标明正负号、大小；弯矩画在杆件的受拉纤维一侧，标明大小，不标明正负号。过程如图 3.3 所示。

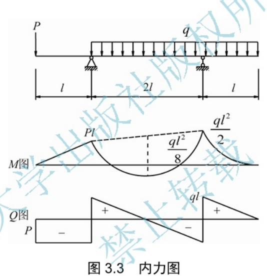


图 3.3　内力图

3.1.2　内力与荷载的关系

为了能找到结构内力图的简化作法，现针对常见的荷载，推导结构杆件内力 M、Q 与荷载集度 q 之间的微分关系。取图 3.4 所示的单元体，假设荷载向下为正。

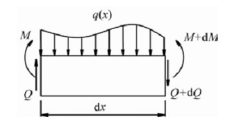


图 3.4　单元体

考虑平衡关系，以右侧截面形心为矩心，$\sum M = 0$，有

$$Q\mathrm{d}x + M - (M + \mathrm{d}M) - \frac{q(x)}{2}(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

忽略高阶微量，得：

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=Q \tag{3-1}$$

由$\sum Y=0$，有

$$Q-q(x)\mathrm{d}x-(Q+\mathrm{d}Q)=0$$

得：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=-q(x) \tag{3-2}$$

将(3-1)式代入(3-2)式，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=-q(x) \tag{3-3}$$

将常见的荷载形式代入荷载与内力的微分关系式(3-1)～式(3-3)，将相应的内力图特征集中于表 3-1。

表 3-1 常见荷载的内力图特征

常见荷载形式		内力图主要特征
均布荷载	q	Q 图 M 图
集中荷载	P	Q 图 M 图
集中力偶	M	Q 图 保持原有的变化趋势 M 图 M_0
铰结点		弯矩为零

3.1.3 分段叠加法作弯矩图

对结构中的直杆段作弯矩图时，可以采用分段叠加法，使绘图工作得到简化。

如图 3.5 所示结构，可用截面法求得 CD 段 C、D 截面的内力。取 CD 为研究对象，画出如图 3.6 所示的受力图。

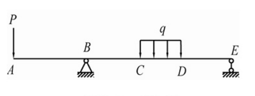


图 3.5 简支梁

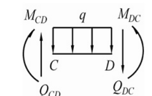


图 3.6 CD 段受力图

将 CD 段看作与 CD 段同跨度的简支梁，易计算 $R_C=Q_{CD}$， $R_D=Q_{DC}$。可见，简支梁的受力与 CD 段的受力完全一致(变形也相同)，则其所受荷载如图 3.7 所示。

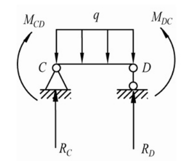


图 3.7　*CD* 段等同简支梁及其受力图

由内力图的特征和弯矩图的叠加原理，*CD* 梁的弯矩图如图 3.8 所示。

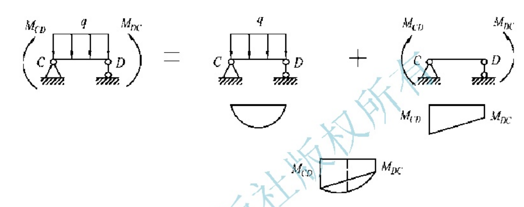


图 3.8　弯矩图的叠加

注意，图 3.8 中的弯矩叠加是纵坐标的叠加，即弯矩图的纵距是垂直于杆轴的，而不是几何图形的拼凑。

利用内力图的特征及弯矩图的分段叠加原理，可以将弯矩图的一般作法归纳如下。

(1)　以外力改变点(集中力作用点、集中力偶作用点、均布荷载的起点和终点)为控制截面，利用截面法控制截面的弯矩值。

(2)　将控制截面间的杆件看作简支梁，利用内力图的特征及控制点的弯矩值作出其弯矩图。

(3) 将所有分段的内力图叠加，得到结构的弯矩图。

3.2　多跨静定梁

多跨静定梁是由若干根梁用铰联结而成用来跨越几个相联结构的静定梁。图 3.9 为公路桥梁中使用的多跨静定梁及其计算简图。

除了在桥梁方面较常采用这种结构形式外，在房屋建筑中的檩条有时也采用这种形式。图 3.10 所示为一多跨木檩条的构造及其计算简图。在檩条接头处采用斜搭接的形式中间用一个螺栓系紧，这种接头不能抵抗弯矩但可防止所连构件在横向或纵向的相对移动，故可看作铰接。

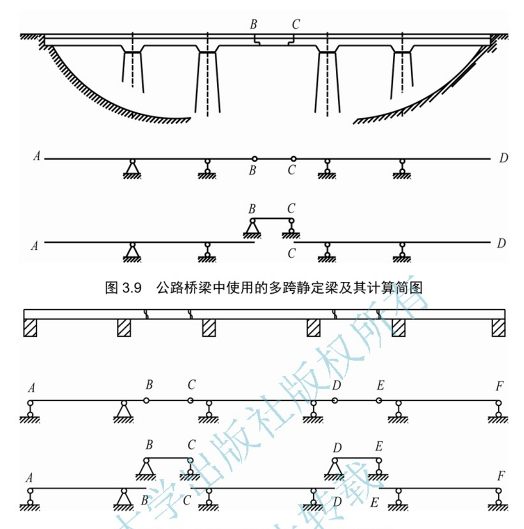


图 3.9　公路桥梁中使用的多跨静定梁及其计算简图

图 3.10　多跨木檩条的构造及其计算简图

由多跨静定梁的几何组成分析可知，图 3.9 及图 3.10 中的 *AB* 直接由支座链杆固定于基础，是几何不变部分，而图 3.9 中的 *CD* 及图 3.10 中的 *CD* 和 *EF* 在竖向荷载作用下也能独立地维持平衡，我们称它们为基本部分；而其他各个部分必须要依靠其他部分的支撑才能保持保证其几何不变性，故称为附属部分。

为清晰起见，它们之间的支承关系可用图 3.11(a)～图 3.11(c)来表示。这种图称为层次图，它是按照附属部分支承于基本部分之上来作出的。

对于多跨静定梁，只要了解它的组成和各部分的传力次序，即不难进行内力计算。从层次图可以看出：基本部分的荷载作用并不影响附属部分，而附属部分的荷载作用则必传至基本部分。因此，在计算多跨静定梁时，应先计算附属部分，再计算基本部分。

二者之间的作用可以根据作用力和反作用力定理确定，即附属部分支座反力的反作用力，就是加于基本部分的荷载。这样多跨静定梁即可拆成若干单跨梁，分别计算。而后将各单跨梁的内力图相叠加，即得到多跨梁静定梁的内力图。

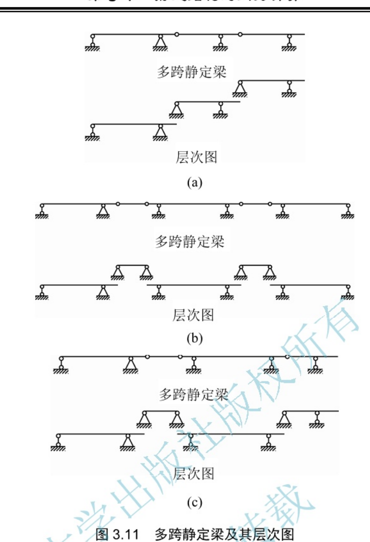


图 3.11　多跨静定梁及其层次图

【例 3-1】　作出图 3.12 所示多跨静定梁的弯矩图。

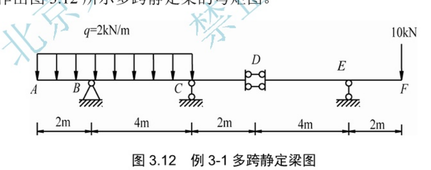


图 3.12　例 3-1 多跨静定梁图

解：(1) 根据题设条件，首先分析其几何组成，并作出层次图，如图 3.13 所示。

图 3.13　例 3-1 多跨静定梁层次图

(2)　作出附属部分内力图，由于附属部分是一个带悬臂端的简支梁，根据内力图的特征，可以很容易地作出其内力图，如图 3.14 所示。



图 3.14　附属部分内力图

(3) 将附属部分的 D 支座的反力反方向作用于基本部分的 D 截面，得到基本部分的计算简图，如图 3.15 所示。同样可以作出其内力图，如图 3.16 所示。

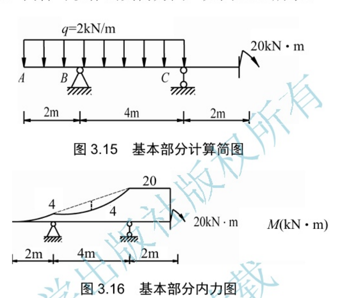


图 3.15　基本部分计算简图

图 3.16　基本部分内力图

(4) 将图 3.14 和图 3.16 叠加，得到图 3.17 所示的原结构的弯矩图。

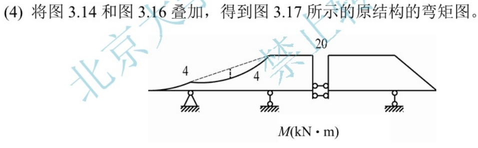


图 3.17　原结构的弯矩图

3.3　静定平面刚架

平面刚架是由若干直杆通过全部刚结点或部分刚结点连接所组成的结构。图 3.18 所示为平面桁架与平面刚架的计算简图。由于刚结点约束使各杆之间不能发生相对转动，因而各杆之间的夹角保持不变。从受力的角度来看，刚结点能承受和传递弯矩，所以刚架能提供较大的使用空间。刚架在工程结构中应用十分广泛。

(a) 桁架，全部由铰结点约束　　(b) 刚架，有刚结点约束

图 3.18　平面桁架与平面刚架计算简图

由于刚结点的特点，刚架中的主要内力是弯矩。同时由于刚结点能传递弯矩，所以可以使结构中的内力分布更为均匀，即结构中的弯矩峰值可以达到削减。

根据刚架受力特点，可以将其分为悬臂刚架、简支刚架、三铰刚架、组合刚架等。图 3.19 所示为常见的平面静定刚架及其计算简图。



(a) 工程中常见的平面静定刚架

(b) 常见平面静定刚架的计算简图

图 3.19　平面静定刚架

平面静定刚架的内力计算和梁一样，用截面法取隔离体，利用静力平衡条件求解未知力。其步骤通常是先进行几何构造分析，找出基本部分和附属部分；然后由整体或部分的平衡条件求出支反力；再逐杆求出杆端内力，最后由叠加原理得到结构的内力图。

3.3.1　支座反力的计算

刚架的支反力可以根据静力平衡条件来求得，但不同的刚架形式，求解时隔离体的选择不同。对于悬臂刚架和简支刚架，由于未知支反力只有 3 个，可以取整体为研究对象，3 个方程就可以解出 3 个未知数。对于三铰刚架和组合刚架，由于未知支反力多于 3 个，所以需要选取多个隔离体才能求出所有的未知支反力。下面用两个例子说明支反力的求法。

【例 3-2】　求图 3.20 和图 3.22 所示刚架所受支反力。

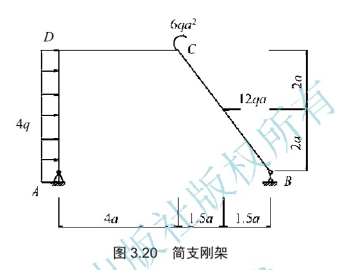


图 3.20　简支刚架

解：简支刚架所受支反力计算过程如下。

对于图 3.20 简支刚架，取整体为研究对象，计算简图如图 3.21 所示。

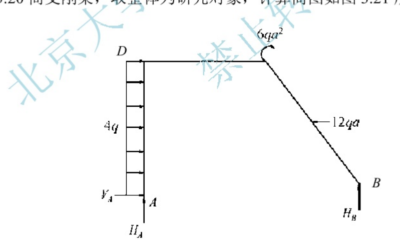


图 3.21　简支刚架所受支反力计算简图

考虑静力平衡，由：

$$\sum X = 0\text{，得 } V_A = 12qa - 4q \cdot 4a = -4qa\ (\text{向左})$$

$$\sum M_A = 0\text{，得 } H_B = \frac{6qa^2 + \frac{1}{2} \times 4q \times (4a)^2 - 12qa \times 2a}{4a + 1.5a + 1.5a} = 2qa\ (\text{向上})$$

$$\sum Y = 0\text{，得 } H_A = -H_B = -2qa\ (\text{向下})$$

经校核无误。

三铰刚架所受支反力计算过程如下。

(1) 对于图 3.22 简支刚架取整体为研究对象，计算简图如图 3.23(a)所示。

考虑静力平衡，由：

$\sum M_B = 0 \quad H_A \times 8a = 4a \times q \times 6a$ 得 $H_A = 30a$ (向上)

$\sum Y = 0$， $H_B = 10a$ (向上)

(2) 取 CB 为研究对象，计算简图如图 3.23(b)所示。

考虑静力平衡，由：

$\sum M_C = 0$， $H_B \times 4a = -V_B \times 7a$ ，得 $V_B = -40a/7$ (向左)

(3) 再以整体为研究对象，考虑静力平衡，由：

$\sum X = 0$，得 $V_A = -V_B = 40a/7$ (向右)

经校核无误。

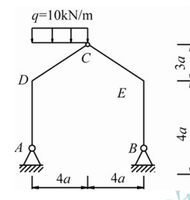


图 3.22　三铰刚架

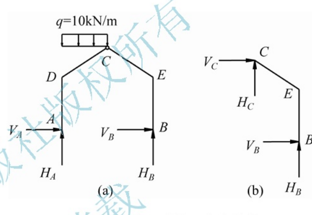


图 3.23　三铰钢架所受支反力计算简图

3.3.2　内力计算

在确定了刚架的支反力后，可以用截面法求得每个控制点的内力值，控制点的选取可以是外力改变点(集中力作用点、集中力偶作用点、均布荷载的起点和终点)，也可以是各杆的杆端(在刚架内力计算时，一般选择各杆杆端为控制点)，逐杆求出各杆端内力。

【例 3-3】　计算图 3.24 所示悬臂刚架各杆杆端内力。

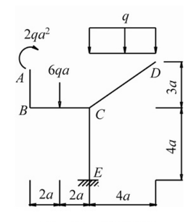
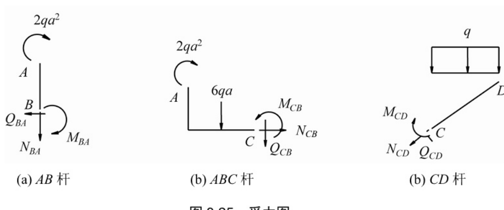


图 3.24　悬臂刚架

解：(1) 取 AB 为研究对象，其受力情况如图 3.25(a)所示。



(a) AB 杆　　(b) ABC 杆　　(b) CD 杆

图 3.25　受力图

考虑静力平衡条件，由：

$\sum M_B = 0$，$2qa^2 - M_{BA} = 0$，得 $M_{BA} = 2pa^2$ (左侧受拉)

$\sum X = 0$，得 $Q_{BA} = 0$

$\sum Y = 0$，得 $N_{BA} = 0$

(2) 取 ABC 为研究对象，画出 ABC 杆的受力图如图 3.25(b)所示。

考虑静力平衡条件，由

$\sum M_B = 0$，$2qa^2 - M_{CB} - 6qa \cdot 2a = 0$，得 $M_{CB} = -10qa^2$ (上侧受拉)

$\sum X = 0$，得 $Q_{CB} = -6qa$

$\sum Y = 0$，得 $N_{CB} = 0$

(3) 取 CD 为研究对象，其受力图如图 3.25(c)所示。

考虑静力平衡条件，由：

$\sum M_C = 0$，$M_{CD} + q(4a)^2/2 = 0$，得 $M_{CD} = -8qa^2$ (上侧受拉)

$\sum X = 0$，$N_{CD} + 4qa \times \sin\beta = 0$，得 $N_{CD} = -2.4qa$ (受压)

$\sum Y = 0$，$Q_{CD} - 4qa \times \cos\beta = 0$，得 $Q_{CD} = 3.2qa$

(4) 取整体为研究对象，其受力图如图 3.26 所示。

考虑静力平衡条件，由

$\sum M_E = 0$，$M_{EC} + q(4a)^2/2 + 2qa^2 - 6qa \times 2a = 0$，得 $M_{EC} = 2qa^2$ (右侧受拉)

$\sum X = 0$，得 $Q_{EC} = 0$

$\sum Y = 0$，得 $N_{EC} = -6qa - 4qa = -10qa$ (受压)

(5) 取结点 C 的力矩平衡，画出杆端力矩受力图如图 3.27 所示。由

$\sum M_C = 0$，$M_{CB} + M_{CE} = M_{CD}$，得 $M_{CE} = -2qa^2$ (右侧受拉)

经校核无误。

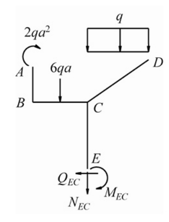


图 3.26　整体受力图

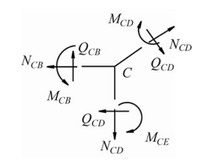


图 3.27　结点 C 受力图

【例 3-4】　计算如图 3.28 中刚架的各杆杆端内力。

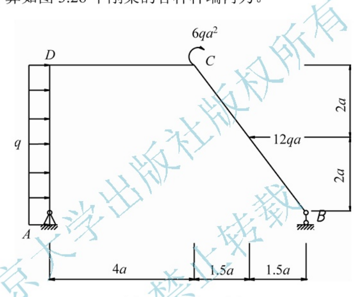


图 3.28　例 3-4 图

解：(1) 取 AD 为研究对象，受力图如图 3.29 所示。

$\sum X = 0$，$Q_{DA} = -12qa$

$\sum Y = 0$，$N_{DA} = 2qa$

$\sum M_D = 0$，$V_A \cdot 4a + M_{DA} - 4q(4a)^2/2 = 0$，得 $M_{DA} = 16qa^2$ (左侧受拉)

(2) 由结点 D 的弯矩平衡，$M_{DC} = 16qa^2$ (上侧受拉)

(3) 取 ACD 为研究对象，受力图如图 3.30 所示。

$\sum Y = 0$，$Q_{DA} = -12qa$

$\sum X = 0$，$N_{DA} = 2qa$

$\sum Mc = 0$，$V_A \cdot 4a + H_A \cdot 4a - M_{CD} - 4q(4a)^2/2 = 0$，得 $M_{DC} = -24qa^2$ (上侧受拉)

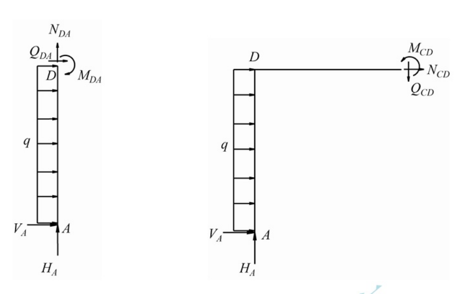


图 3.29　*AD* 杆受力图　　　图 3.30　*ACD* 受力图

(4) 从 C 结点的右侧截断，取 BC 为研究对象，受力图如图 3.31 所示。

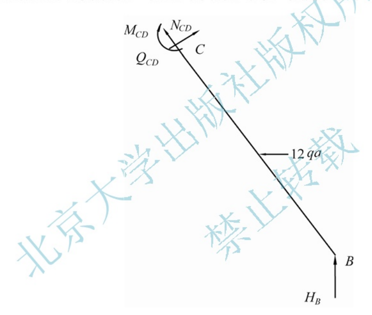


图 3.31　*BC* 受力图

$\sum M_C = 0$，得 $M_{CB} = -18qa^2$ (外侧受拉)

$\sum X = 0$，得 $N_{CB} = -2qa\sin\beta - 12qa\cos\beta = -8.8qa$

$\sum Y = 0$，得 $Q_{CB} = -2qa\cos\beta + 12qa\sin\beta = 8.4qa$

(5)　B 端剪力与轴力，把 $H_B = 2qa$ 向 X、Y 方向分解即可得到。

$N_{BC} = -1.6qa$，$Q_{BC} = -1.2qa$

经校核无误。

【例 3-5】　计算图 3.32 中刚架的各杆杆端内力。

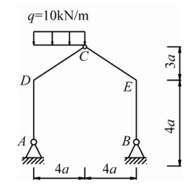
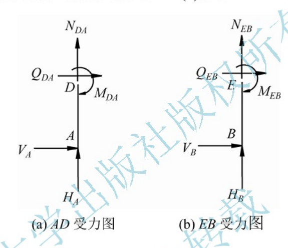


图 3.32　例 3-5 图

解：(1) 取 AD 为研究对象，受力图如图 3.33(a)所示。



(a) AD 受力图　　(b) EB 受力图

图 3.33

$\sum M_D = 0 \quad M_{DA} = V_A \times 4a = 16qa^2/7$　(左侧受拉)

由结点 D 的平衡，$M_{DC} = 16qa^2/7$　(外侧受拉)

$\sum X = 0$，$Q_{DA} = -4qa/7$

$\sum Y = 0$，$N_{DA} = -3qa$

(2) 取 EB 为研究对象，受力图如图 3.33(b)所示。

$\sum M_E = 0 \quad M_{EB} = -16qa^2/7$ (右侧受拉)

由结点 E 的平衡，$M_{EC} = -16qa^2/7$ (外侧受拉)

$\sum X = 0$，$Q_{ED} = 4qa/7$

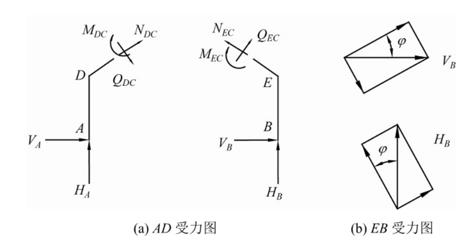
$\sum Y = 0$，$N_{ED} = -qa$

(3) 从 D 结点上侧截断，取 AD 为研究对象，受力图如图 3.34(a)所示。

$\sum X = 0$，$Q_{DC} + V_A \sin\beta - H_A \cos\beta = 0$ 得 $Q_{DC} = 2.057qa$

$\sum Y = 0$，$N_{DC} + V_A \cos\beta + H_A \sin\beta = 0$ 得 $N_{DC} = -2.257qa$

(4) 从 E 结点上侧截断，取 EB 为研究对象，受力图如图 3.34(b)所示。



(a) *AD* 受力图　　　　(b) *EB* 受力图

图 3.34

$\sum X=0$，$N_{EC}+V_B\sin\beta+H_B\cos\beta=0$　得　$N_{EC}=-1.057qa$

$\sum Y=0$，$Q_{EC}+V_B\cos\beta-H_B\sin\beta=0$　得　$Q_{EC}=-0.257qa$

(5) 取 *ADC* 为研究对象，受力图如图 3.35 所示。

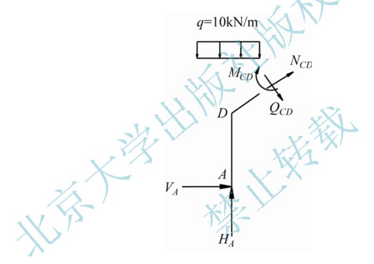


图 3.35　*ADC* 受力图

$\sum X=0$，$Q_{CD}+V_A\sin\beta-H_A\cos\beta+4qa\cos\beta=0$　得　$Q_{CD}=-1.143qa$

$\sum Y=0$，$N_{CD}+V_A\cos\beta+H_A\sin\beta-4qa\sin\beta=0$　得　$N_{CD}=0.143qa$

经校核无误。

3.3.3　内力图的绘制

在逐杆求出各杆的杆端内力后，可以利用叠加原理作出结构的内力图。在绘制内力图时，弯矩图画在杆件受拉一侧，标明大小，不标正负号(不规定正负号)；剪力和轴力的符号规定与梁相同，画在杆的任一侧，要标明正负号。

【例 3-6】 分别绘制例 3-3～例 3-5 的内力图。

(1) 例 3-3 中已求出各杆杆端内力。

$Q_{BA}=0$

$N_{BA}=0$

$M_{CB} = -10qa^2$ (上侧受拉)

$Q_{CB} = -6qa$

$N_{CB} = 0$

$M_{CD} = -8qa^2$ (上侧受拉)

$N_{CD} = -2.4qa$ (受压)

$Q_{CD} = 3.2qa$

$M_{EC} = 2qa^2$ (右侧受拉)

$Q_{EC} = 0$

$N_{EC} = -6qa - 4qa = -10qa$ (受压)

$M_{CE} = -2pa^2$ (右侧受拉)

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征，可作出其内力图如图 3.36 所示。

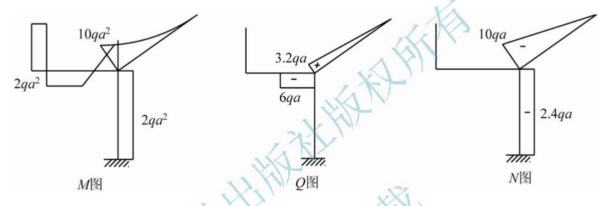


图 3.36　例 3-3 内力图

(2) 例 3-4 中已求出各杆杆端内力。

$Q_{DA} = -12qa$

$N_{DA} = 2qa$

$M_{DA} = 16qa^2$ (左侧受拉)

$M_{DC} = 16qa^2$ (上侧受拉)

$Q_{CD} = -2qa$

$N_{CD} = -12qa$

$M_{DC} = -24qa^2$ (上侧受拉)

$M_{CB} = -18qa^2$ (外侧受拉)

$N_{CB} = -8.8qa$

$Q_{CB} = 8.4qa$

$N_{BC} = -1.6qa$

$Q_{BC} = -1.2qa$

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征，可作出其内力图如图 3.37 所示。

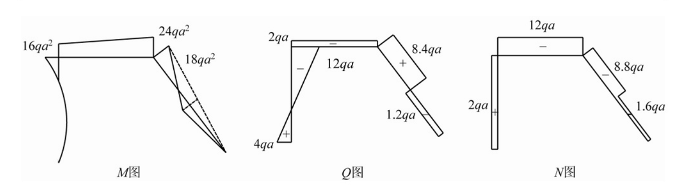


图 3.37　例 3-4 内力图

(3) 例 3-5 中已求出各杆杆端内力。

$M_{DA}=16qa^2/7$　(左侧受拉)

$M_{DC}=16qa^2/7$　(外侧受拉)

$Q_{DA}=-4qa/7$

$N_{DA}=-3qa$

$M_{EB}=-16qa^2/7$ (右侧受拉)

$M_{EC}=-16qa^2/7$ (外侧受拉)

$Q_{ED}=4qa/7$

$N_{ED}=-qa$

$Q_{DC}=2.057qa$

$N_{DC}=-2.257qa$

$N_{EC}=-1.057qa$

$Q_{EC}=-0.257qa$

$Q_{CD}=-1.143qa$

$N_{CD}=0.143qa$

根据叠加原理及表 3-1 中内力图特征，可作出其内力图如图 3.38 所示。

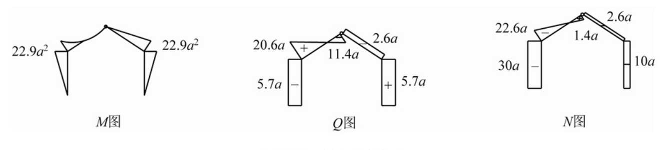


图 3.38　例 3-5 内力图

3.4　三　铰　拱

3.4.1　基本概念和类型

拱在我国建筑结构上的应用，已有悠久的历史，如我国河北省建于隋代大业元年至十

一年赵州桥。目前在桥梁核房屋建筑工程中，拱式结构的应用也很广泛，主要应用于礼堂、体育馆和展览馆等大空间的结构中。

拱的形式有无铰拱、二铰拱、带拉杆拱、三铰拱等，如图 3.39 所示。其中三铰拱是静定的，而两铰拱、无铰拱是超静定的。

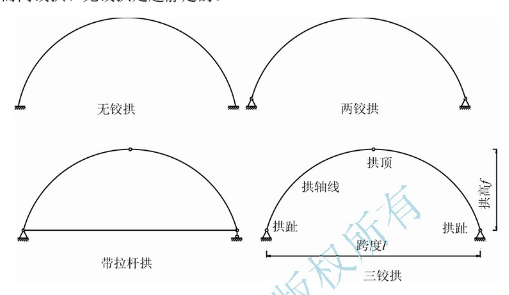


图 3.39　拱的形式

拱的各部分名称如图 3.39 所示。拱身各截面形心的连线称为拱轴线，拱结构的最高点称为拱顶，拱与支座的联结处称为拱趾，或拱脚，两个拱趾之间的距离称为跨度，拱顶到两拱趾连线的竖向距离称为拱高，或拱矢。

3.4.2　在竖向荷载作用下的支座反力计算

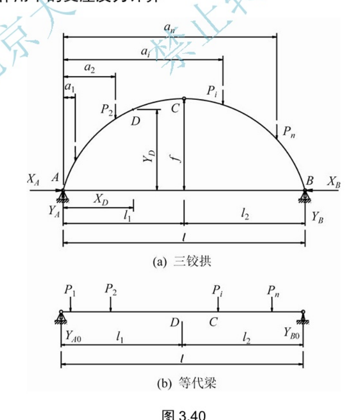


图 3.40

图 3.40(a)所示为竖向荷载作用下的三铰拱，图 3.40(b)所示为与图(a)拱具有相同跨度的简支梁，称为等代梁。

(1) 由拱的整体平衡，和$\sum M_B = 0$，$Y_A \cdot l - \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (l - a_i) = 0$ 得

$$Y_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (l - a_i)}{l} \tag{3-4}$$

由$\sum M_A = 0$，$Y_B \cdot l - \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot a_i = 0$ 得

$$Y_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot a_i}{l} \tag{3-5}$$

由$\sum X = 0$，得

$$X_A = X_B = H \tag{3-6}$$

取顶铰 C 以左的部分为研究对象，由$\sum M_C = 0$，$Y_A \cdot l_1 - \sum_{i=1}^{2} P_i \left(l_1 - a_i\right) - Hf = 0$，得

$$H = \frac{V_A \cdot l_1 - \sum_{i=1}^{2} P_i \left(l_1 - a_i\right)}{f} \tag{3-7}$$

上式中的分子就是等代梁在截面 C 的弯矩 M_C^0，所以

$$H = \frac{M_C^0}{f} \tag{3-8}$$

式中，M_C^0——代梁 C 截面的弯矩。

由式(3-8)可知，三铰拱在竖向荷载作用下，其水平反力(推力)与拱的形状无关，而仅与 3 个铰的位置有关。若竖向荷载和拱趾位置不变，则随着拱矢 f 增大，水平推力减小。反之，拱矢 f 减小，水平推力增大。

(2) 由等代梁的整体平衡，可得

$$Y_A^0 = Y_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (l - a_i)}{l} \tag{3-9}$$

$$Y_B^0 = Y_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot a_i}{l} \tag{3-10}$$

3.4.3　在竖向荷载作用下的内力计算

在求得支座反力后，可以求出拱轴上任一截面的内力。现以图 3.40 中任意截面 D 为例，导出内力计算公式。

取截面 D 以左部分为研究对象，受力图如图 3.41 所示。

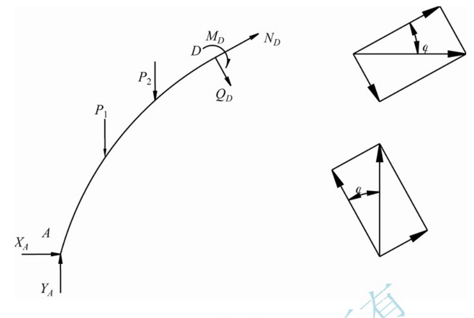


图 3.41

(1) 弯矩的计算。

弯矩符号规定以使拱内侧纤维受拉为正，反之为负。由

$$\sum M_D = 0$$

$$M_D = Y_A \cdot x_D - H \cdot y_D - P_1 \cdot (x_D - a_1) - P_2 \cdot (x_D - a_2)$$

$$= Y_A^0 \cdot x_D - P_1 \cdot (x_D - a_1) - P_2 \cdot (x_D - a_2) - H \cdot y_D$$

即得 D 截面的弯矩：

$$M_D = M_D^0 - H \cdot y_D \tag{3-11}$$

式中，M_D^0——代梁对应于 D 处截面的弯矩。

即拱内任一截面的弯矩 M_D 等于等代梁上对应 D 截面的弯矩 M_D^0 减去推力所引起的弯矩 $H \cdot y_D$。由此可见，由于推力的存在，拱的弯矩比等代梁(相应的简支梁)的弯矩要小。

(2) 剪力计算。

剪力符号的规定是使截面两侧的脱离体有顺时针转动趋势的为正，反之为负。由

$$\sum Y = 0，\quad Q_D = (Y_A - P_1 - P_2) \cdot \cos\phi_D - H \cdot \sin\phi_D$$

即得 D 截面的剪力：

$$Q_D = Q_D^0 \cdot \cos\phi_D - H \cdot \sin\phi_D \tag{3-12}$$

式中，Q_D^0——等代梁截面 D 的剪力，$Q_D^0 = (Y_A - P_1 - P_2)$

(3) 轴力计算。

轴力的正负号规定与梁相同。由：

$$\sum X = 0，\quad N_D = (Y_A - P_1 - P_2) \cdot \sin\phi_D + H \cdot \cos\phi_D$$

即得 D 截面的轴力：

$$N_D = Y_D^0 \cdot \sin\phi_D + H \cdot \cos\phi_D \tag{3-13}$$

式(3-11)、式(3-12)及式(3-13)中的 ϕ_D 由轴线确定，ϕ_D 的符号在图示坐标系中左半拱为正，右半拱为负。

【例 3-7】 如图 3.42 所示拱轴方程为 $y=\dfrac{4f}{l^2}x(l-x)$，试求截面 D 的内力。

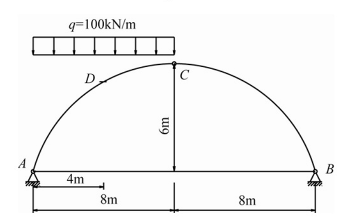


图 3.42

解：(1) 求支座反力。

取整体为研究对象，由：

$\sum M_A=0$，得　$Y_B=200\text{kN}$

$\sum y=0$，得　$V_A=200\text{kN}$

取 BC 为研究对象，由：

$\sum M_C=0$，得　$H=800/3\text{kN}$

(2) 取 AD 为研究对象，受力图如图 3.43 所示。

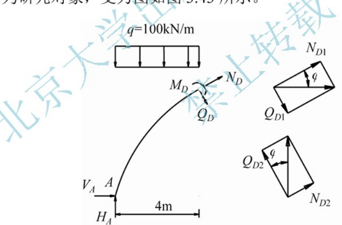


图 3.43

考虑静力平衡条件，由：

$\sum M_D=0$，得　$M_D=V_A\cdot 4-H\cdot 4.5-100\times 4\times 2$ =400 kN·m (内侧受拉)

$$\tan\phi_D=y'\big|_{x=4}=\frac{3}{4}$$

建立图 3.43 所示坐标系，

$$\sum X=0,\quad N_D=(600-400)\sin\phi_D+\frac{800}{3}\cos\phi_D=333.33\ (\text{压力})$$

$$\sum Y=0,\quad Q_D=(600-400)\cos\phi_D-\frac{800}{3}\sin\phi_D=0$$

3.4.4　合理拱轴线

拱在荷载作用下，各截面上会产生 3 个内力分量，截面处于偏心受压状态，应力分布不均匀。如果能选取一根合适的拱轴线，使得在荷载作用下，拱上各截面的弯矩均为零，则拱仅仅受到轴力的作用。此时，各截面都处于均匀受压的状态，因而材料能得到充分的利用，相应的拱截面尺寸是最小的。从理论上说，设计成这样的拱是最经济的，故称这样的拱轴为合理拱轴。

对于在竖向荷载作用下的三铰拱，可以利用前面的结论求出合理拱轴，由任一截面的弯矩为

$$M_D = M_D^0 - H \cdot y_D$$

根据合理拱轴的定义，各截面上的弯矩为零，即：

$$M = M^0 - H \cdot y = 0$$

解得：

$$y = \frac{M^0}{H} \tag{3-14}$$

由式(3-14)可知，合理拱轴的竖向距离 y 与相应的等待梁的弯矩成正比。当拱上的荷载已知时，只要求出等待梁的弯矩方程，就可以得到三铰拱的合理拱轴线方程。

【例 3-8】　求图 3.44 所示三铰拱的合理拱轴。

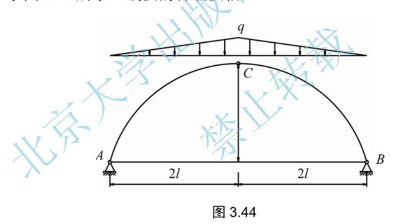


图 3.44

解：由对称性，$Y_A = Y_B = \int_0^{2l} \frac{qx}{2l} \mathrm{d}x = ql$

取左半为研究对象，由：

$\sum M_C = 0$，$Y_A \times 2l - H \times l - \int_0^{2l} \frac{qx}{2l} \mathrm{d}x \left(2l - x\right) = 0$，得 $H = \frac{4ql}{3}$

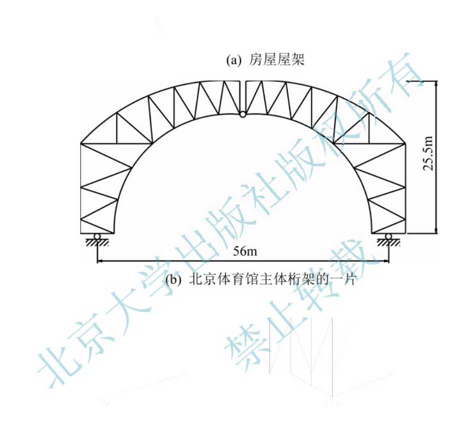
由式(3-14)得到合理拱轴方程：

$$y = \frac{M\left(x\right)}{H} = \frac{qlx - \dfrac{qx^3}{12l}}{\dfrac{4ql}{3}} = \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{16l^2}$$

3.5　静定平面桁架

3.5.1　桁架的基本概念与分类

桁架结构指由许多细长杆件通过铰连接而成的空腹形式的结构。它被广泛应用于桥梁、建筑工程和机械工程。图 3.45 所示为工程中所用的桁架的计算简图。



(a) 房屋屋架

(b) 北京体育馆主体桁架的一片

(c) 九江长江大桥主桁梁

图 3.45　工程中所用的桁架

实际的桁架各杆之间的连接以及所使用的材料多种多样，比如有榫接、螺栓或焊接，它们的实际受力是很复杂的，要对它们进行精确计算很困难。但由于桁架一般都是由比较长细的杆件组成，而且承受的荷载大多数通过其他构件传到结点上，这就使得桁架结点的刚性对于杆件内力的影响大大减小，接近于铰的作用。杆件在荷载作用下，主要承受轴向力，弯矩和剪力很小，可以忽略。所以在实际的工作中，为简化计算，通常对桁架作如下假设。

(1) 各结点是光滑无摩擦的铰结点连接。

(2) 各杆轴均为直线，在同一平面内且通过铰的几何中心。

(3) 荷载作用在结点上，并且都在桁架平面内。

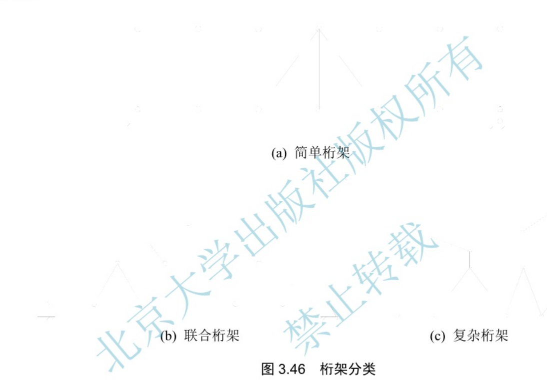
符合上述假设条件的的桁架称为理想桁架。桁架中每根杆仅在两端铰接，这样的杆称为链杆或二力杆。由于杆件只受到轴力作用，其横截面上只产生均匀分布的正应力，这样可以使材料充分发挥作用。所以，相对梁来讲，桁架的自重较轻，适用于大跨度结构。

根据桁架的几何构造特点，桁架可以分为 3 种。

(1)　简单桁架：由铰结三角形出发，依此增加二元体，最后与基础连接，如图 3.46(a)所示。

(2)　联合桁架：由简单桁架，按两刚片或三刚片法则连接，最后与基础连接，如图 3.46(b)所示。

(3)　复杂桁架：不属于上两类，无法用两刚片或三刚片法则分析的桁架，如图 3.46(c)所示。



(a) 简单桁架

(b) 联合桁架　　(c) 复杂桁架

图 3.46　桁架分类

桁架的杆件根据所在位置的不同，分别有不同的定义。上边的各杆称为上弦杆，下边的各杆称为下弦杆，中间的各杆称为腹杆，弦杆上相邻两结点间称为节间，间距称为节间长度。两支座的水平间距称为跨度，垂直间距称为桁高，如图 3.47 所示。

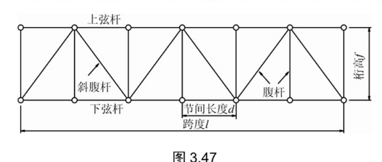


图 3.47

3.5.2　结点法

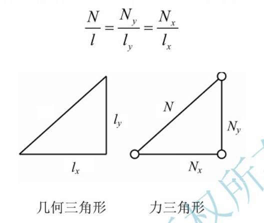
为了求得桁架各杆的内力，截取桁架中的一个结点作为研究对象，利用平衡条件解出

杆的内力。这种方法叫结点法。

原则上，只要截取的结点有不多于两个未知力，均可用结点法。但由于结点有两个自由度，仅能建立两个平衡方程，所以结点法一般应用于简单桁架，且按与简单桁架增加二元体的反向截取结点，可保证每个结点仅有两个未知力。

在建立平衡方程时，通常把杆轴力分解为水平分力 N_X 和竖向分力 N_Y，在图 3.48 中，力三角形和几何三角形具有相似关系，由相似定理，可以得到

$$\frac{N}{l}=\frac{N_y}{l_y}=\frac{N_x}{l_x}$$



几何三角形　　力三角形

图 3.48

在同一结点的所有内力为未知的各杆中，除某一杆外，其余各杆都共线，则该杆称为此结点的单杆。关于结点单杆这类特殊杆件，有下面几种情况。

(1) 连接两根不共线杆的结点，若该结点上无荷载作用，则此两杆的轴力为零。(二元体上无结点荷载，该两杆不受力)，如图 3.49(a)所示。

(2) 连接三根杆的结点上无荷载，且其中两根杆共线，则另一杆必为零轴力杆。如图 3.49(b)所示。

(3) X 形连接杆件的受力特点，如图 3.49(c)所示。

(4) K 形连接杆件的受力特点，如图 3.49(d)所示。

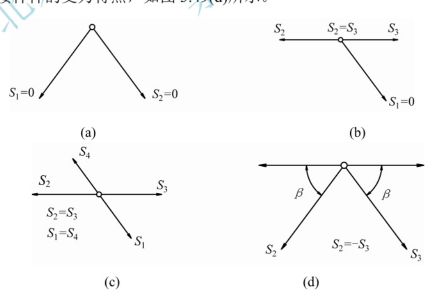


图 3.49　特殊杆件

【例 3-9】　计算图 3.50 中桁架各杆内力。

解：(1) 求支座反力，$X_1=80\text{kN}$(向右)，$Y_2=-40\text{kN}$(向下)，$Y_1=120\text{kN}$(向上)

(2) 利用特殊杆件结论，先找零杆，有 $N_{67}=0$，$N_{63}=0$。

(3) 取结点 8 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(a)所示。其中未知轴力均表示为正方向。

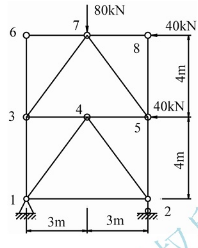


图 3.50

由　$\sum X=0$，$N_{87}+40=0$，得　$N_{87}=-40\text{kN}$

$\sum Y=0$，得 $N_{85}=0$

(4) 再取结点 7 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(b)所示。由：

$\sum X=0$，$N_{73x}+40=N_{75x}$

$\sum Y=0$，$N_{73y}+N_{75y}+80=0$

由于 $\dfrac{N_{73x}}{N_{73y}}=\dfrac{N_{75x}}{N_{75y}}=\dfrac{3}{4}$，联立上述两式得：

$N_{73X}=-50\text{kN}$，$N_{75X}=-10\text{kN}$

(5) 再取结点 3 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(c)所示。由：

$\sum X=0$，$N_{34}=N_{37x}=50\text{kN}$

$\sum Y=0$，$N_{31}=-N_{37y}=-\dfrac{200}{3}\text{kN}$

(6) 再取结点 5 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(d)所示。由：

$\sum X=0$，$N_{54}=-30\text{kN}$

$\sum Y=0$，$N_{52}=-\dfrac{40}{3}\text{kN}$

(7) 再取结点 4 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(e)所示。由于结点 4 为一 K 形结点，所以有 $N_{41}=-N_{42}$，由：

$\sum X=0$，$N_{41X}=-N_{42Y}=-40\text{kN}$

(8) 再取结点 2 为研究对象，画出受力图，如图 3.51(f)所示。 由：

$\sum X=0$，$N_{21}=-40\text{kN}$

$\sum Y=0$，$-\dfrac{40}{3}+\dfrac{160}{3}-40=0$，校核无误。

(9) 作出轴力图，如图 3.51(g)所示。

(a)　　(b)　　(c)　　(d)

(e)　　(f)　　(g)

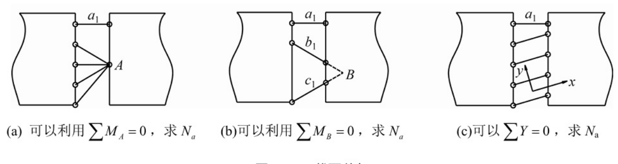
图 3.51

3.5.3　截面法

在求桁架各杆的内力时，如果截取桁架中两个以上结点作为研究对象，利用平衡条件解出杆的内力。这种方法叫截面法。

由于截面法所取研究对象有 3 个自由度，所以能建立 3 个平衡方程，每次可以求取 3 个未知力。

截面法截的得的各杆中，除某一根杆外，其余各杆都交于同一点或彼此平行，则此杆为截面单杆，如图 3.52(a)～图 3.52(c)中的 a 杆。



(a) 可以利用 $\sum M_A=0$，求 N_a　　(b)可以利用 $\sum M_B=0$，求 N_a　　(c)可以 $\sum Y=0$，求 N_a

图 3.52　截面单杆

【例 3-10】　求图 3.53 中指定杆 1、2 及 3 的轴力。

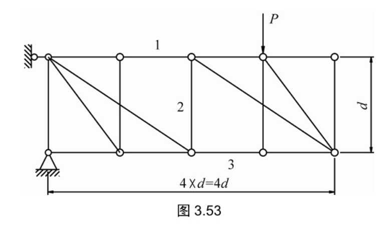


图 3.53

解：(1) 取 I-I 截面，取右半部分为研究对象，如图 3.54(b)所示。

由 $\sum M_A = 0$，$N_1 \cdot d = P \cdot d$ 得　$N_1 = P$ (拉力)

(2) 取 II-II 截面，取右半部分为研究对象，如图 3.54(c)所示。

由 $\sum Y = 0$，$N_2 = -P$ (压力)

$\sum M_B = 0$，$N_3 \cdot d + P \cdot d = 0$　　得　$N_3 = -$P(压力)

经校核无误。

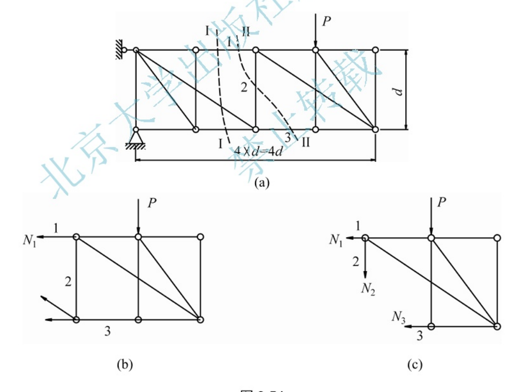


图 3.54

3.5.4　结点法和截面法的联合应用

在求解桁架时，不必拘泥于哪一种方法，只要能快速求出杆件的轴力，就是行之有效的方法。所以，有时联合应用结点法和截面法更为方便。

在联合应用结点法和截面法求解桁架时，只要能简单、快捷求出内力，二者不必分先后。在取隔离体时，应尽量避免求解联立方程和未知力臂。

【例 3-11】　求图 3.55 中指定杆 1、2 和 3 的轴力。

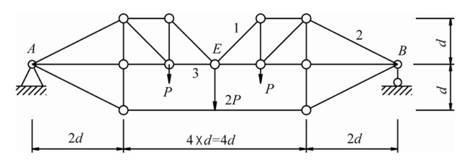


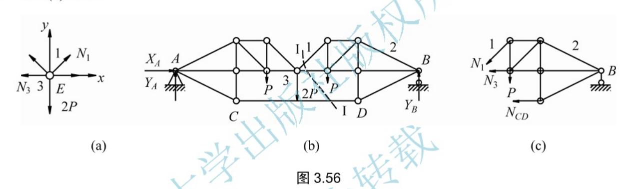
图 3.55

解：(1)几何构造分析。

(2) 以整体为研究对象，求支反力，由对称性

$$Y_A = Y_B = 2P，\quad X_A = 0$$

(3)　由于结点 E 为“K”结点，两根斜杆轴力相同。取结点 E 为研究对象，受力图如图 3.56(a)所示。



(a)　(b)　(c)

图 3.56

由 $\sum Y = 0$，$2N_{1y} = 2P$，得　$N_{1X} = P$

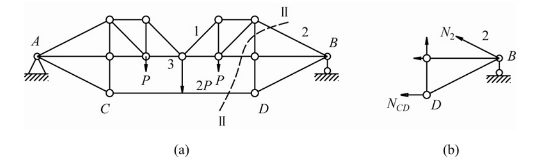
由相似关系可得　$N_1 = \sqrt{2}P$ (拉力)，$N_{1X} = P$

(4) 取 I-I 截面，取右半部分为研究对象，受力图如图 3.56(c)所示。

由 $\sum M_E = 0$，得　$N_{CD} = 7P$ (拉力)

$\sum X = 0$，$N_{1X} + N_3 + N_{CD} = 0$，得　$N_3 = -8P$ (压力)

(5) 取 II−II 截面，取右半部分为研究对象，受力图如图 3.57(b)所示。



(a)　(b)

图 3.57

由 $\sum M_F = 0$，$N_{2y} \cdot 2\text{d}+2P \cdot 2\text{d}=N_{CD} \cdot d$ 得　$N_{2y} = 3P/2$

由相似关系，$N_2=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}P$(拉力)

经校核无误。

3.6　组 合 结 构

组合结构的特点及计算过程如下。

(1) 由链杆及梁式杆构成，如图 3.58 所示。

(2) 先计算链杆的轴力，后计算梁式杆的内力。

(3) 截面法时，避免截断梁式杆(受弯杆)。

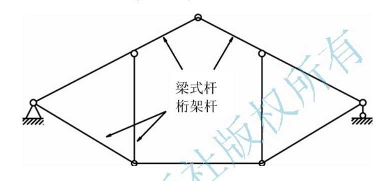


图 3.58　组合结构示例

【例 3-12】　作图 3.59 所示结构内力图。

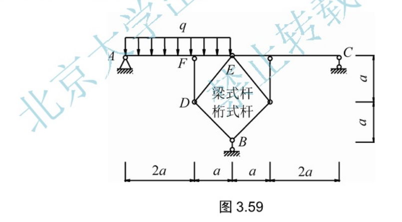


图 3.59

解：(1) 取结点 B 为研究对象，受力图如图 3.60 所示。

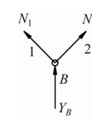


图 3.60　B 点受力图

由 $\sum X=0$，得　$N_1=N_2$

由 $\sum Y=0$，得　$Y_B+2N_{1y}=0$，即

$$Y_B + \sqrt{2}N_1 = 0 \tag{1}$$

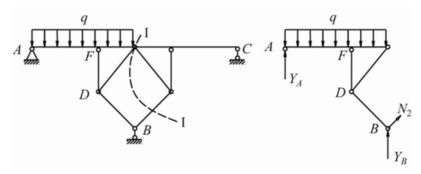


图 3.61

(2) 取 I-I 截面，取左半部分为研究对象，受力图如图 3.61 所示，由：

$\sum M_C = 0$，$Y_A \cdot 3a - \dfrac{1}{2}q(3a)^2 - N_1 \cdot \sqrt{2}a = 0$，得：

$$3Y_A - \sqrt{2}N_1 = 4.5qa \tag{2}$$

(3) 取整体为研究对象，

由 $\sum M_C = 0$，$Y_A \cdot 6a + Y_B \cdot 3a - 3qa \cdot 4.5a = 0$，即：

$$2Y_A + Y_B = 4.5qa \tag{3}$$

联立(1)、(2)、(3)式，解得

$Y_A = 0$，$Y_B = 4.5qa$ (向上)，$N_1 = N_2 = -\dfrac{9\sqrt{2}}{4}qa$ (压力)

由 $\sum Y = 0$，得 $Y_D = -1.5qa$ (向下)

(4) 取 D 结点为研究对象，受力图如图 3.62 所示，由：

$N_{DF} = -4.5qa$ (压力)，$N_{DE} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}qa$ (拉力)

经校核无误。

(5) 作出内力图，如图 3.63 所示。

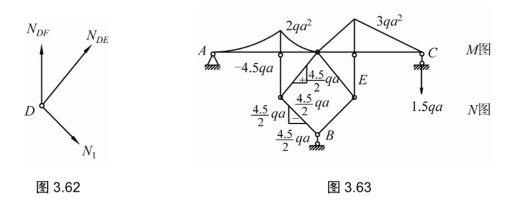


图 3.62　　图 3.63

3.7　静定结构受力特性

静定结构和超静定结构都是几何不变体系，由于静定结构是无多余约束的，所以静定

结构的内力可以完全由静力平衡条件确定。得到的解答是唯一的。

由此可知静定给构的基本静力特性就是满足平衡条件的内力解答的唯一性，其受力特性，都是在此基础上派生出来的。

(1) 静定结构的反力和内力与结构所用材料的性质、截面的大小和形状都没有关系。

(2) 温度改变、支座移动和制造误差等因素在静定结构中不引起内力。

例如在图 3.64(a)中，简支梁由于支座 *B* 下沉只会引起刚体位移(如虚线所示)，而在梁内并不引起内力；图 3.64(b)中，设三铰拱的杆 *BC* 因施工误差稍有缩短，拼装后结构形状略有改变(如虚线所示)，但三铰拱内不会产生内力；图 3.64(c)中，悬臂梁上下侧存在温差，由于其可以自由地产生弯曲变形(如虚线所示)，所以梁内不会产生内力。这些结论都可以利用静力平衡条件证明，因为在结构上没有荷载作用，所以由平衡条件求得的支座反力为零，相应的内力也为零。

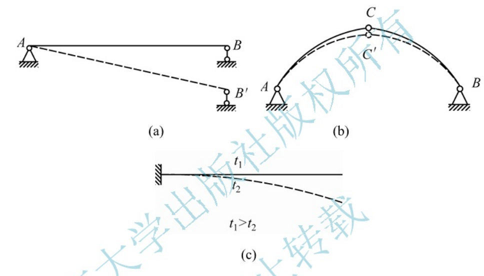


图 3.64　支座移动和温度改变

(3) 静定结构的局部平衡特性。

如果一组平衡力系作用在静定结构上某一几何不变部分，则只会使该部分产生内力外，其余部分不会产生内力，如图 3.65 所示，一对平衡力系作用在桁架的 *AB* 杆上，则其余部分的反力和内力均为零。可分别由平衡条件 $\sum X=0$，$\sum Y=0$，$\sum M_A=0$ 得到 $X_A=Y_A=Y_B=0$，再由结点法可以得到除 *AB* 杆外，其余各杆均为零杆。

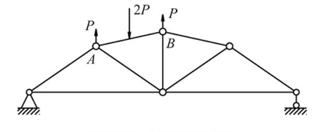


图 3.65　局部平衡特性

(4) 静定结构的荷载等效特性。

当静定结构的一个内部几何不变部分上的荷载作等效变换时，其余部分的内力不变。这里，等效荷载是指荷载分布虽不同，但其合力彼此相等的荷载。

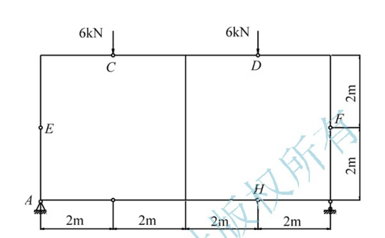
(5) 静定结构的构造变换特性。

当静定结构的一个内部几何不变部分作构造变换时，其余部分的内力不变。

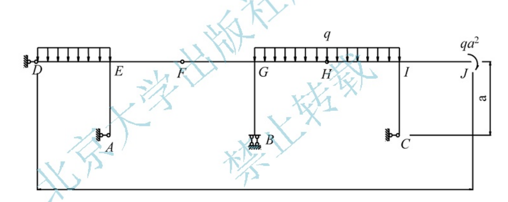
3.8　习　　题

1. 作出以下各图的弯矩图。

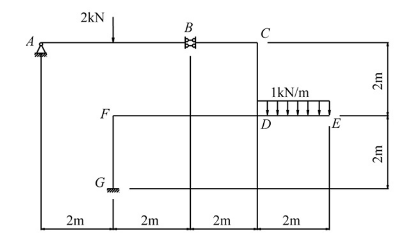
(1)



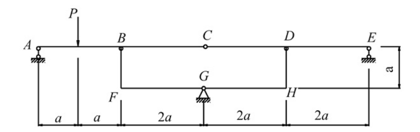
(2)



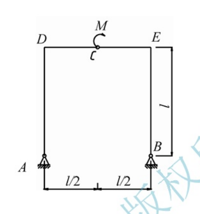
(3)



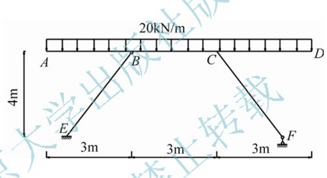

(4)


P
A
B
C
D
E
G
F
H
a
a
a
2a
2a
2a

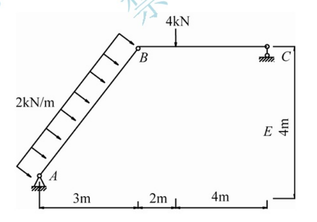
(5)


M
D
E
C
l
B
A
l/2
l/2

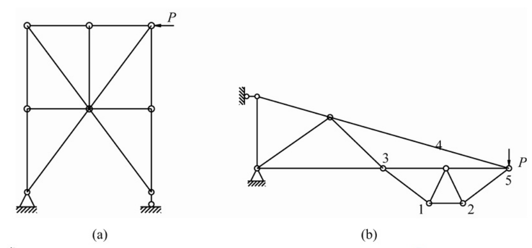
(6)


20kN/m
A
B
C
D
4m
E
F
3m
3m
3m

2. 作内力图。

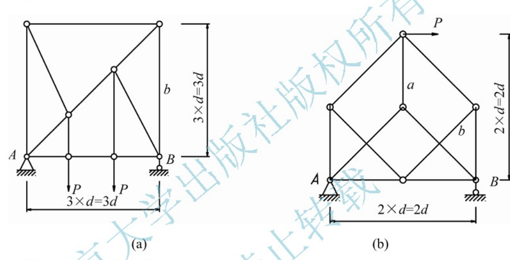

4kN
B
C
2kN/m
E
4m
A
3m
2m
4m

3. 找出所有零杆。



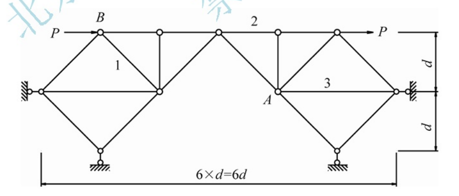
(a)　　　　(b)

4. 求 N_b。

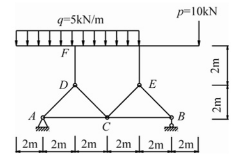


(a)　　　　(b)

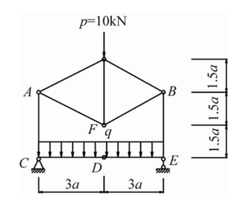
5. 求指定杆的轴力 N_1、N_2 及 N_3。



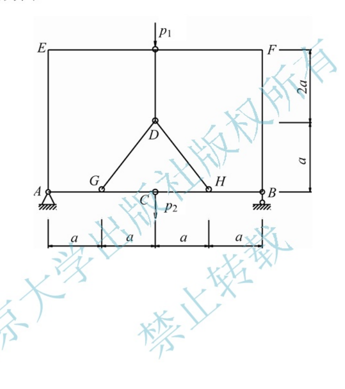
6. 作图示结构内力图。



7. 作图示结构内力图。



8. 作图示结构内力图。



第 4 章　结构的位移计算

教学提示：掌握结构的位移计算，对本课程具有十分重要的意义。解算超静定结构和验算结构刚度所必需的，是本章的重点。本章在变形体虚功原理的基础上，讲述静定结构的位移计算。特别是图乘法求位移，最常使用，应熟练掌握。还要学会温度改变及支座移动产生的位移的计算。此外还介绍线弹性结构的几个互等定理，它们在后面各章中将得到应用。

教学要求：本章学习的主要内容有位移计算的基本概念，虚功原理，荷载作用下的位移计算，图乘法，温度变化和支座下沉情况下的位移计算，线弹性结构的互等定理。要求正确理解实功、虚功、广义力和广义位移，了解变形体虚功方程，掌握位移计算公式，熟练地利用图乘法正确计算荷载作用下结构位移，了解温度改变及支座移动产生的位移计算方法，理解功的互等定理，掌握位移互等定理和反力互等定理。

4.1　材料力学变形公式回顾

工程结构设计除了必须满足强度要求外，还必须保证具有足够的刚度，即不能产生过大的变形。此外，工程中大量的结构是超静定的，因此，要求解超静定结构不仅要会分析结构的内力，而且要能分析结构的变形。而结构的变形是由各部分位移表征的，所以学习并掌握结构的位移计算，对本课程具有十分重要的意义。

在材料力学中已经给出了求弹性杆件在外力作用下的位移计算问题。并且给出了解决简单超静定问题的基本思想，即综合考虑“平衡、协调和材料的物性关系”3 个方面才能求得问题的解答。这时直接给出在材料力学基本受力(拉压、弯、剪)变形形式下，内力与变形关系已有如下结论。

(1) 拉压变形：应变　$\varepsilon = \dfrac{N}{EA}$；　伸长 $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$

(2) 弯曲变形：曲率　$\kappa = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI}$

(3) 剪切变形：切应变　$\gamma = \dfrac{kQ}{GA}$

式中，N、Q 分别为轴向力和剪力(也称为切力)，M 为弯矩，EA、EI 和 GA 分别为抗拉压刚度、抗弯刚度和抗剪(抗切)刚度，k 为截面切应力不均匀分布系数，l 为杆件长度。

4.2 虚 功 原 理

4.2.1　实功与虚功

当做功的力 P 与相应位移 Δ 彼此相关时，即位移是由做功的力本身所引起的，则所做的功称为实功。而当做功的力与相应位移彼此独立无关时，则所做的功称为虚功，如图 4.1 所示，简支梁在 C 点受力 P 作用而达到实曲线平衡位置后，如果由于某种原因(如其他荷载或温度变化等)使梁继续发生微小变形到虚曲线位置，力对相应位移所做的功就是虚功，即虚功为：

$$W = P\Delta_2 \tag{4-1}$$

式中，C 点的位移 Δ_2 不是由力 P 所引起的。

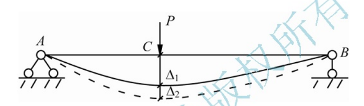
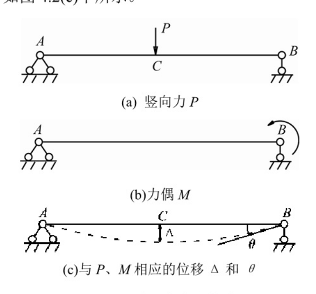


图 4.1　力与位移

4.2.2　广义位移与广义力

如果 P 是一个力，相应的 Δ 为沿这个力作用线方向的线位移，如图 4.2(a)简支梁在 C 点作用一个竖向力 P，让它经历如图 4.2(c)，所示的位移做功，相应的位移 Δ 则是在 C 点沿 P 力作用方向的线位移，如图 4.2(c)中所示。

如果 P 是一个力偶，相应的 Δ 为沿力偶作用方向的角位移，如图 4.2(b)简支梁在 B 端作用一个力偶 M，让它经历图 4.2(c)所示的位移做功，相应的位移 Δ 则是沿 M 作用方向的 B 端截面的转角 θ，如图 4.2(c)中所示。



(a) 竖向力 P

(b)力偶 M

(c)与 P、M 相应的位移 Δ 和 θ

图 4.2　力和相应的位移

如果一组力经历相应的位移做功，结果可表示为式(4-1)的形式。即一组力可以用一个符号 P 表示，相应的位移也可用一个符号 Δ 表示，这种扩大了的力和位移分别称为广义力和广义位移(与广义力 P 相对应)。

4.2.3　变形体的虚功原理

当体系在变形过程中，不但各杆发生刚体运动，内部材料同时也产生应变，体系属于变形体体系。对于变形体体系，虚功原理可表述如下：体系在任意平衡力系作用下，给体系以几何可能的位移和变形，体系上所有外力所做的虚功总和恒等于体系各截面所有内力在微段变形上所作的虚功总和，即：

$$W_e = W_i \tag{4-2}$$

式中，W_e——体系的外力虚功；

W_i——体系的内力虚功。

这里，几何可能的位移和变形的含义为：位移和变形是微小量，位移与约束条件相符合，变形是协调的(即体系变形后仍是一个连续体，既不出现裂缝或断开，也不出现重叠或搭接)。后两条常合在一起称为变形连续条件。

4.3　荷载下位移计算公式

4.3.1　单位荷载法推导公式

图 4.3(a)是简支梁 AB 在荷载作用下的一组平衡力系，图 4.3(b)是简支梁 AB 在其他因素作用下的位移和变形状态。现在求结构上任一截面 K 沿任一指定方向上的广义位移 Δ_K。

利用虚功原理求解这个问题，首先要确定做功的力系和引起变形的力系。其中做功的力系称为力状态，引起变形的力系称为位移状态。由于现在要求的是实际荷载作用下结构的位移，故应以实际荷载[4.3(a)]作用下结构所处的状态作为结构的位移状态，亦称为实际状态[4.3(b)]。另一方面还需建立力状态。由于力状态和位移状态除了结构形式和支座情况需相同外，其他方面两者完全无关。因而，力状态完全可以根据计算的需要而假设。为了使力状态的外力能够在实际状态的所求位移 Δ_{KP} 上做虚功就需要在 K 点所求位移方向上加一个单位集中力 $P_K = 1$，如图 4.3(c)所示。因为 $P_K = 1$ 是为了计算实际状态的位移而假设的，故此状态又称虚设状态。

下面我们来计算虚拟状态的外力和内力在实际状态相应的位移和变形上所做的虚功。

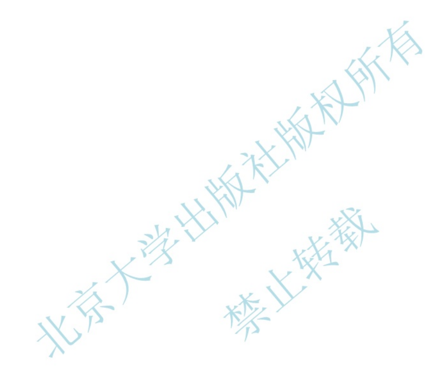
注意到实际状态的支座无位移，因而外力虚功为：

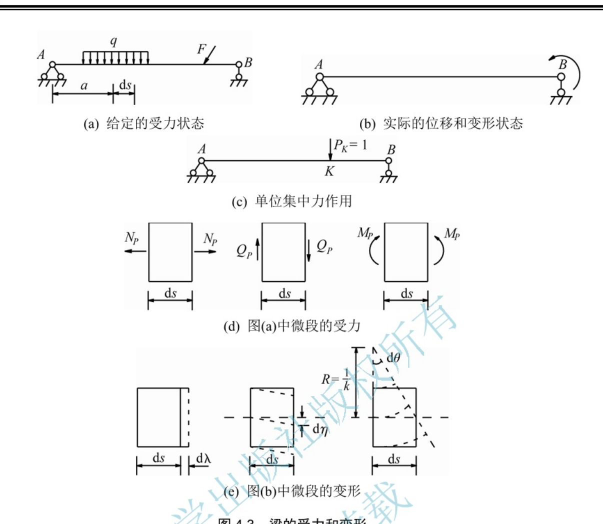
$$W_e = P_K \cdot \Delta_{KP} = 1 \cdot \Delta_{KP} \tag{a}$$

接着讨论在杆系体系中怎样得到内力虚功 W_i 的表达式。

从梁中取出微段 $\mathrm{d}s$ 进行讨论。图 4.3(a)中微段 $\mathrm{d}s$ 的内力如图 4.3(d)所示。图 4.3(b)中相应微段 $\mathrm{d}s$ 的变形用相对变形表示，如图 4.3(e)所示。设实际状态下横截面的内力弯矩、剪力、轴力分别用 M_P、Q_P、N_P 来表示，而虚设状态下横截面的内力弯矩、剪力、轴力

分别用 $\bar{M}$ 、 $\bar{Q}$ 、 $\bar{N}$ 来表示。





(a) 给定的受力状态　　(b) 实际的位移和变形状态

(c) 单位集中力作用

(d) 图(a)中微段的受力

(e) 图(b)中微段的变形

图 4.3　梁的受力和变形

图 4.3(d)微段的内力图在图 4.3(e)微段变形上所作的内力虚功定义为

$$\mathrm{d}W_i = \bar{N}\mathrm{d}\lambda + \bar{Q}\mathrm{d}\eta + \bar{M}\mathrm{d}\theta$$

其中 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\eta$、$\mathrm{d}\theta$ 为 $\mathrm{d}s$ 微段截面相应的相对变形，即相对轴向变形、相对剪切变形和相对转角。由材料力学知：

$$\mathrm{d}\theta = \frac{M_P\mathrm{d}s}{EI}$$

$$\mathrm{d}\eta = k\frac{Q_P\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{N_P\mathrm{d}s}{EA}$$

因此，梁 AB 内力虚功表达式为：

$$\begin{aligned} W_i &= \int_A^B \left(\bar{N}\mathrm{d}\lambda + \bar{Q}\mathrm{d}\eta + \bar{M}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \int_A^B \left(\frac{\bar{N}N_P}{EA} + k\frac{\bar{Q}Q_P}{GA} + \frac{\bar{M}M_P}{EI}\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{b}$$

根据虚功原理：

$$W_e = W_i \tag{c}$$

将式(a)、(b)代入式(c)，便得到弹性结构在荷载作用下的位移计算公式：

$$\Delta_{KP} = \sum\int \frac{\bar{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s + \sum\int k\frac{\bar{Q}Q_P}{GA}\mathrm{d}s + \sum\int \frac{\bar{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{4-3}$$

其中 k 是因为切应力在截面上分布不均匀而加的改正系数，与截面形状有关；矩形截面 $k=1.2$，图形截面 $k=\frac{10}{9}$，工字形或箱形截面 $k=\frac{A}{A_1}$ (A_1 为腹板面积)。

当计算结果为正时，表示外力虚功为正，这说明所求位移 Δ_{KP} 方的实际方向与假定的单位荷载($P_K=1$)的指向相同；为负时，则表示 Δ_{KP} 方的方向与 $P_K=1$ 相反。

总结位移公式(4-3)的推导过程，我们可以看出，按虚功原理求位移的基本步骤如下。

(1) 把在任何实际因素作用下的结构作为第二状态，即实际状态。

(2) 根据问题的要求，在结构上欲求位移处沿欲求位移的方向，加一单位集中力，作为第一状态，即虚拟状态。

(3) 计算虚拟状态的外力、内力在实际状态的位移和变形上所作的外力虚功 W_e 和内力虚功 W_i，并代入虚功方程 $W_e=W_i$，即得所求位移。

这种采用虚拟单位荷载来计算结构位移的方法称为单位荷载法。值得指出：虚拟状态是根据所求位移而假设的，随着所求位移的不同，虚拟状态也不相同。例如对于图 4.4(a)所示结构，求不同位移的虚拟状态有以下几种情况。

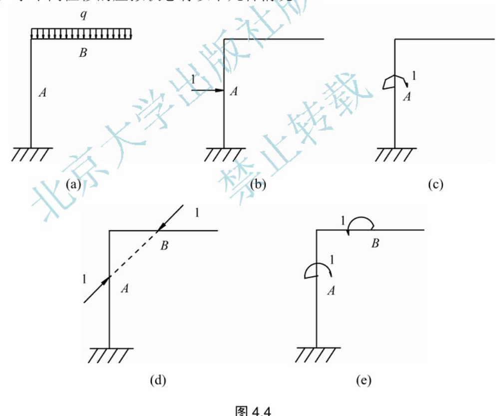


图 4.4

(1) 欲求 A 点沿水平方向的线位移，则应在 A 点沿水平方向加一单位集中力，如图 4.4(b)所示。

(2) 欲求 A 点的角位移，则应在 A 点加一单位力偶，如图 4.4(c)所示。

(3) 欲求 A、B 两点的相对线位移，即 A、B 两点间距离的改变量(两点相互拉开或靠拢的距离)，则应在 A、B 两点沿 AB 连线方向加一对反向的单位集中力，如图 4.4(d)所

示。

(4) 欲求 A、B 两点的相对角位移，则应在 A、B 两截面加一对反向的单位力偶，如图 4.4(e)所示。

对于桁架，如图 4.5 所示，情况也基本相同，只是在求某杆的角位移时，由于杆件只受轴力，故应将“单位力偶”等效变换为作用在该杆两端结点上的一对反向集中力，其作用线与杆轴垂直，大小等于杆长的倒数 $1/l$。

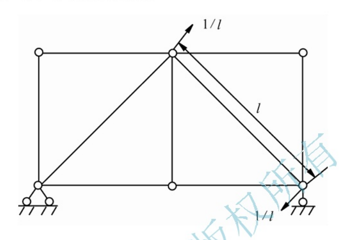


图 4.5

综上可见：不论属于哪种情况，虚拟状态所加的荷载都是与所求广义位移相应的单位广义力。

4.3.2　积分法求位移

利用公式(4-3)计算结构位移的基本步骤如下。

(1) 在欲求位移处沿所求位移方向虚设广义单位力，然后分别列各杆段内力方程。

(2) 列实际荷载作用下各杆段内力方程。

(3) 将个内力方程分别代入式(4-3)，分段积分后再求总和即可计算出所求位移。

根据上面步骤求结构某截面位移的方法称为积分法。

利用荷载作用下位移计算一般公式(4-3)计算结构位移时，可根据结构的具体情况对公式进行简化。对于梁和刚架，位移主要是由弯矩引起的，轴力和剪力的影响很小，一般可忽略不计。因此，位移计算公式(4-3)对于梁和刚架可简化为：

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P \mathrm{d}s}{EI} \tag{4-4}$$

在桁架结构中，因为杆件只有轴力作用，而且同一杆件的轴力 N_P、$\bar{N}$ 及 EA 都沿杆的长度方向不变，且对于杆件体系，$k=1$，因此，位移计算公式(4-3)对于桁架可简化为：

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum \int \frac{\bar{N} N_P \mathrm{d}s}{EA} = \sum \frac{\bar{N} N_P}{EA} \int \mathrm{d}s \\ &= \sum \frac{\bar{N} N_P l}{EA}\end{aligned} \tag{4-5}$$

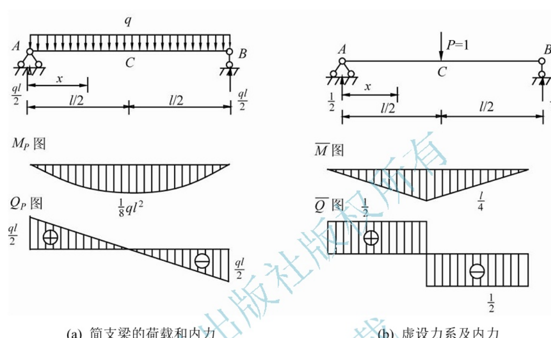
在桁梁组合结构中，杆件可分为梁式杆和轴力杆两类，梁式杆只考虑弯矩的影响，而

轴力杆则只考虑轴力的影响，因此，位移计算公式(4-3)对于桁梁组合结构可简化为：

$$\Delta=\sum\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}+\sum\frac{\bar{N}N_P l}{EA} \tag{4-6}$$

4.3.3　荷载下位移计算举例

【例 4-1】　试求如图 4.6 (a)所示简支梁在中点 C 的竖向位移 Δ 。



(a) 简支梁的荷载和内力　　(b) 虚设力系及内力

图 4.6　求简支梁中点的竖向位移

解：(1) 在 C 点加相应于竖向位移的单位力 $P=1$，如图 4.6(b)所示。

(2)　由平衡条件求实际荷载作用下的内力，如图 4.6(a)所示，再求虚设单位荷载作用下的内力，如图 4.6(b)所示。取 A 点为坐标原点，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$ 时，任意截面 x 的内力表达式为：

实际荷载　　　　虚设荷载

$$M_P=\frac{q}{2}\left(lx-x^2\right)\qquad \bar{M}=\frac{1}{2}lx$$

$$Q_P=\frac{q}{2}(l-2x)\qquad \bar{Q}=\frac{1}{2}$$

$$N_P=0\qquad \bar{N}=0$$

(3) 计算 Δ 。

将以上内力表达式代入式(4-4)，分别计算各项变形引起的位移。因对称，积分限取长度的一半，然后乘两倍。

弯曲变形引起的位移为：

$$\Delta_M=\sum\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}=2\int_0^{l/2}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{q}{2}(lx-x^2)}{EI}\mathrm{d}x=\frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

Δ_M 为正值，说明 C 点的挠度与虚设方向一致。

剪切变形引起的位移为(对于矩形截面，$k=1.2$)：

$$\Delta_Q=\sum\int\frac{\bar{Q}Q_P\mathrm{d}s}{GA}=2\times1.2\int_0^{l/2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{q}{2}(l-2x)}{GA}\mathrm{d}x=0.15\frac{ql^2}{GA}(\downarrow)$$

轴向变形引起的位移为零(因梁的轴力为零)。

所以，总位移为：

$$\Delta=\Delta_M+\Delta_Q=\frac{5ql^4}{384EI}+0.15\frac{ql^2}{GA}(\downarrow)$$

【例 4-2】　试求图 4.7(a)所示结构 C 端的水平位移 Δ_{CH} 和角位移 φ_c，已知 EI 为一常数。

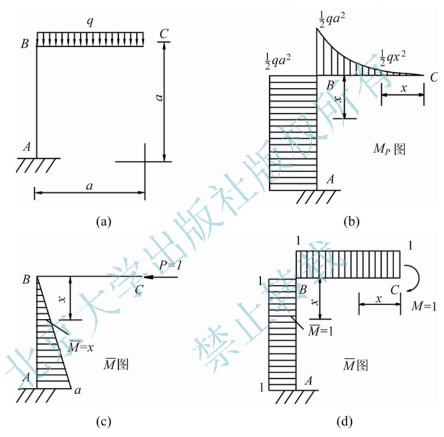


图 4.7　例 4-2 图

解：略去轴力和剪力的影响，只计算弯矩一项。在荷载作用下，弯矩的变化如图 4.7(b)所示。

(1) 求 C 端的水平位移时，可在 C 点加一水平单位力作为虚拟状态，其方向取为向左，如图 4.7(c)所示。

两种状态的弯矩为：

$$\text{横梁 } BC \text{ 上}\quad \bar{M}=0,\qquad M_P=-\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 } AB \text{ 上}\quad \bar{M}=x,\qquad M_P=-\frac{1}{2}qa^2$$

代入公式(4-4)，得 C 端的水平位移为：

$$\Delta_{CH}=\sum\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}x}{EI}=\frac{1}{EI}\int_0^a x\cdot\left(-\frac{1}{2}qa^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{qa^4}{4EI}$$

计算结果为负，表示实际位移与所设虚拟力的方向相反，即不是向左而是向右。

(2)　求 C 端的角位移时，可在 C 点加一单位力矩作为虚拟状态，其方向设为顺时针方向，如图 4.7(d)所示。

两种状态的弯矩为：

$$\text{横梁 } BC \text{ 上}\quad \bar{M}=-1,\qquad M_P=-\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 } AB \text{ 上}\quad \bar{M}=-1,\qquad M_P=-\frac{1}{2}qa^2$$

代入公式(4-4)，得 C 端的角位移为：

$$\varphi_C=\frac{1}{EI}\int_0^a(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}qx^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{EI}\int_0^a(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}qa^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2qa^3}{3EI}$$

计算结果为正，表示实际位移与所设虚拟力的方向相同。

【例 4-3】　图 4.8(a)所示桁架，计算下弦中点 C 的挠度。已知各杆弹性模量 $E=2.1\times10^8$ kPa，截面面积 $A=12$ cm²。

解：(1) 在 C 点加单位力 $P=1$，如图 4.8(c)所示。

(2) 求 N_p。

计算在荷载作用下各杆的轴力 N_P，如图 4.8(b)所示。

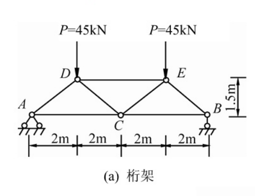
(3) 求 $\bar{N}$。

计算在 P = 1 作用下各杆的轴力 $\bar{N}$，如图 4.8(c)所示。

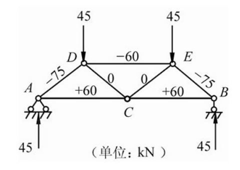
(4) 求 Δ_C。

根据桁架位移公式(4-5)，即

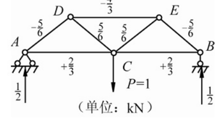
$$\Delta=\sum\frac{\bar{N}N_P}{EA}l$$



(a) 桁架

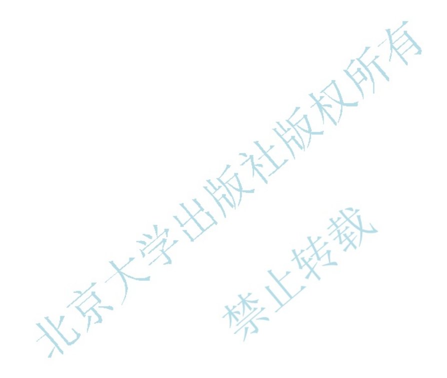


(b) 荷载及轴力



(c) 单位荷载及 $\bar{N}$

图 4.8　求桁架下弦中点的挠度



具体计算过程可列表进行，见表 4-1。由于桁架及荷载的对称性，计算总和时，在表中只计算了半个桁架。杆 DE 的长度只取一半。最后求位移时乘以 2。

$$\Delta_C = 2\times 0.188 = 0.376\ \text{cm}(\downarrow)$$

表 4-1　Δ_C 的计算

杆　件	$\bar{N}$	N_P（KN）	l（cm）	A（cm²）	E（KN/cm²）	$\frac{\bar{N}N_P}{EA}$（cm）
AC	2/3	60	400	12	2.1×10^4	0.063
AD	−5/6	−75	250	12	2.1×10^4	0.062
DE	−4/3	−60	1/2×400	12	2.1×10^4	0.063
DC	5/6	0	250	12	2.1×10^4	0
						$\sum = 0.188$ cm

4.4　图　乘　法

由 4.3.2 节知求梁和刚架结构的位移时，常遇到如下的积分形式：

$$\Delta = \sum\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}$$

这个运算过程，有时是很麻烦的。但是，如果结构各杆段均满足下述 3 个条件，则这一积分式就可逐段通过 $\bar{M}$ 和 M_P 两个弯矩图之间的相乘方法来求得解答。这 3 个条件如下。

(1) 杆段的 EI 为常数。

(2) 杆端轴线为直线。

(3) 各杆段的 $\bar{M}$ 图和 M_P 图中至少有一个为直线图形。

对于等截面直杆，上述的前两个条件恒可满足，至于第三个条件，虽然 M_P 图在受到分布荷载作用时将成为曲线形状，但其 $\bar{M}$ 图却总是由直线段所组成的，我们只要分段考虑就可得到满足。

设某结构上 AB 段为等直杆，EI 为常数，其 M_P、$\bar{M}$ 图如图 4.9 所示。显然是符合上述条件的。我们以 $\bar{M}$ 图的基线为 x 轴，以 $\bar{M}$ 图的延长线与 x 轴的交点 O 为原点，并设置 y 轴如图。则积分式 $\int_A^B\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}$ 中，$\mathrm{d}s$ 可用 $\mathrm{d}x$ 表示，EI 可提出积分号外，又因 $\bar{M}$ 图为一直线，其上任一纵坐标 $\bar{M} = x\tan\alpha$，代入积分式，则有：

$$\int_A^B\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}\int_A^B x\tan\alpha M_P\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\tan\alpha\int_A^B xM_P\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\tan\alpha\int_A^B x\mathrm{d}\omega \quad (4\text{-}7a)$$

这里的 $\mathrm{d}\omega = M_P\mathrm{d}x$ 表示 M_P 图的微分面积，$x\mathrm{d}\omega$ 即为该微面积对 y 轴的面积矩，因此，积分 $\int_A^B x\mathrm{d}\omega$ 表示 M_P 图的面积 ω 对于 y 轴的面积矩。这个面积矩可以写成：

$$\int_A^B x\mathrm{d}\omega = \omega x_c$$

其中 x_c 是 M_P 图的形心到 y 轴的距离。于是式(4-7a)可化为：

$$\int_A^B \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}\tan\alpha \int_A^B x\mathrm{d}\omega = \frac{\tan\alpha}{EI}\omega x_c \tag{4-7b}$$

式中 $x_c \tan\alpha = y_c$ 为 M_P 图的形心 c 所对应的 $\bar{M}$ 图的纵坐标，如图 4.9 所示，代入(4-7b)后，积分式最后简化为：

$$\int_A^B \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}\omega y_c \tag{4-8}$$

上式表明：当上述 3 个条件被满足时，积分式 $\int_A^B \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI}$ 之值就等于 M_P 图的面积 ω(任何图形)乘其形心下相对应的 $\bar{M}$ 图(直线图形)上的竖标 y_c，再除以 EI。所得结果按 ω 与 y_c 在基线的同一侧时为正，否则为负。这就是图形相乘法，简称图乘法。应该注意：y_c 必须从直线图形上取得。当 $\bar{M}$ 图形是由若干段直线组成时，就应该分段图乘。

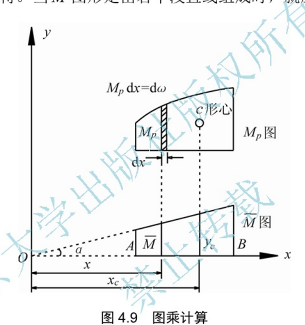


图 4.9　图乘计算

如果结构上所有杆段均可图乘，则位移计算公式(4-4)可写为：

$$\Delta = \sum \frac{\omega y_c}{EI} \tag{4-9}$$

由以上推导过程可见，应用图乘法求结构位移时，应注意下列各点。

(1) 必须符合前面的 3 个条件。

(2) 纵坐标 y_c 只能由直线弯矩图中取值。如果 $\bar{M}$ 和 M_P 图形都是直线，则可取自任何一个图形。

(3) 若面积 ω 与纵坐标 y_c 在杆件的同一侧，乘积取正值；不在同一侧时，乘积取负值。

现将图乘时经常用到的几种弯矩图的面积和形心位置列入图 4.10 中以备查用。应注意在各抛物线图形中，顶点是指切线平行于底边的点。凡顶点在中点或端点的抛物线称为标准抛物线。

应用图乘法时，如遇到弯矩图的形心位置或面积不便于确定的情况，我们可将该图形分解为几个易于确定形心位置或面积的部分，并将这些部分分别与另一图形相乘，然后再

将所得结果相加，即得两图相乘之值。常见的有以下几种情况。

(1) 图 4.11 所示两个梯形图相乘时，梯形的形心位置较难确定，因而把它分解成两个形心位置很容易确定的三角形(也可分为一个矩形和一个三角形)，此时图乘结果为：

$$\int \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2)$$

(2) 当 M_P 图或 $\bar{M}$ 图的竖坐标 a、b 或 c、d 不在基线的同一侧时，如图 4.12 所示。处理原则仍和上面一样，可分解为位于基线两侧的两个三角形，按上述方法分别图乘，然后叠加。式中的 y_1 和 y_2 根据比例计算，图乘时特别要注意正、负号。

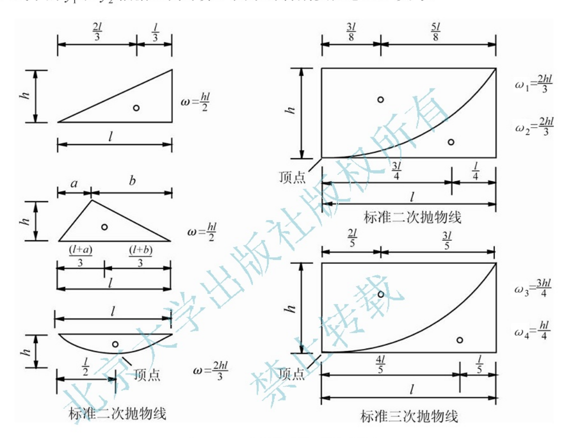


图 4.10 图形面积与形心位置

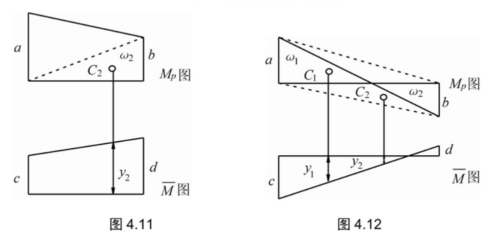


图 4.11

图 4.12

(3) 当 y_c 所属图形不是一段直线而是由若干段直线组成时，应分别图乘，再进行叠加，如图 4.13 所示，图乘结果为：

$$\int \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3)$$



(4)　当 y_c 所属图形各杆段的横截面积不相等时，也应分别图乘，再进行叠加，如图 4.14 所示，图乘结果为：

$$\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}=\frac{\omega_1y_1}{EI_1}+\frac{\omega_2y_2}{EI_2}+\frac{\omega_3y_3}{EI_3}$$

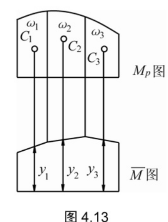


图 4.13

图 4.14

(5)　对于在均布荷载作用下的任何直杆段，其弯矩图可以看成是一个梯形与一个标准抛物线图形的叠加。

图 4.15(a)所示 M_P 图可以看成是一个梯形(M'_P 图)与一个标准抛物线(M''_P 图)的叠加，而梯形(M'_P 图)则可分解成两个三角形(也可分为一个矩形和一个三角形)的叠加，即

$$\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}=\frac{1}{EI}(\omega_1y_1+\omega_2y_2+\omega_3y_3)$$

图 4.15(b)所示 M_P 图可以看成是一个三角形(M'_P 图)与一个标准抛物线(M''_P 图)的叠加，此时须注意的是抛物线(M''_P 图)与 $\bar{M}$ 图位于 x 轴的不同侧，故图乘时取负号，即

$$\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}=\frac{1}{EI}(\omega_1y_1-\omega_2y_2)$$

必须指出，所谓弯矩图的叠加是指其竖标的叠加，而不是原图形状的剪贴拼合。因此，叠加后的抛物线图形的所有竖标仍应为竖向的，即仍垂直于基线 AB ，而不是垂直于 M_a 、M_b 的连线 CD 的。这样，叠加后的抛物线图形与原标准抛物线在形状上虽不同，但二者任一处对应的竖标 y 和微段长度 $\mathrm{d}x$ 仍相等，因而对应的每一窄条微分面积仍相等。由此可见，两个图形总的面积和形心位置仍然是相同的。

图乘法求解的步骤如下。

(1) 作结构在实际荷载作用下的 M_P 图。

(2) 在所求位移处沿所求位移方向虚设广义单位力，并作其 $\bar{M}$ 图。

(3)　分段计算 M_P (或 $\bar{M}$ 图)图的面积 ω 及其形心所对应的 $\bar{M}$ (或 M_P 图)图的纵坐标 y_c 。

(4) 将 ω 、 y_c 代入图乘公式(4-9)计算位移。

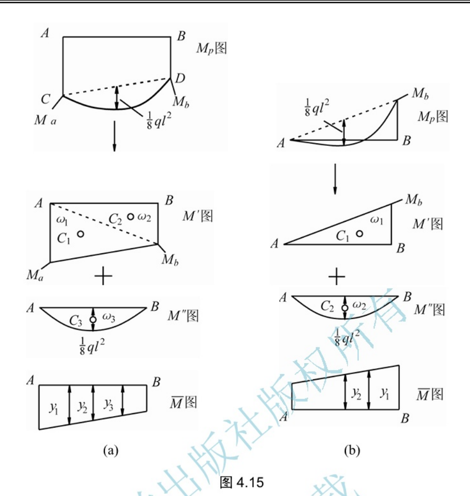
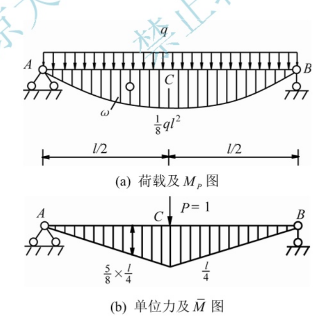


图 4.15

【例 4-4】 用图乘法计算图 4.16(a)所示简支梁在均布荷载 q 作用下中点 C 的挠度，$EI=$常数。



(a) 荷载及 M_P 图

(b) 单位力及 $\overline{M}$ 图

图 4.16　求简支梁跨中挠度

解：(1) 在简支梁中点 C 加单位竖向力 $P=1$，如图 4.16(b)所示。

(2) 分别作荷载 q 产生的弯矩图 M_P，如图 4.16(a)所示，和单位力 $P=1$ 产生的弯矩图

$\bar{M}$，如图 4.16(b)所示。

(3) 计算 Δ。

用图乘公式(4-9)。因 M_P 图是曲线，应以 M_P 图作为 ω，而 $\bar{M}$ 图是两直线组成，应分两段进行。但因图形对称，可计算一半再乘两倍。

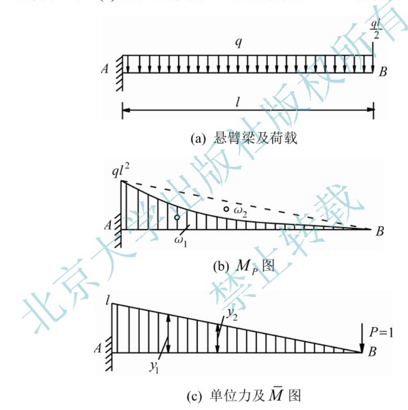
$$\omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{24}$$

$$y_0 = \frac{5}{8}\cdot\frac{l}{4} = \frac{5l}{32}$$

所以

$$\Delta = \sum\int\frac{\bar{M}M_P\mathrm{d}s}{EI} = 2\frac{1}{EI}\omega y_0 = 2\cdot\frac{1}{EI}\cdot\frac{ql^3}{24}\cdot\frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384EI}\ (\downarrow)$$

【例 4-5】　计算图 4.17(a)所示悬臂梁在 B 点的挠度，$EI=$ 常数。



(a) 悬臂梁及荷载

(b) M_P 图

(c) 单位力及 $\bar{M}$ 图

图 4.17　求悬臂梁端点位移

解：(1) 在 B 点加单位竖向力，如图 4.17(c)所示。

(2) 分别作荷载 q 产生的弯矩图 M_P 图，如图 4.17(b)所示，及 $\bar{M}$ 图，如图 4.17(c)所示。

(3) 计算 Δ。

图乘时，要注意此 M_P 图的 B 点不是抛物线的顶点，因而面积和形心不能直接用抛物线面积公式。M_P 图可分解为一个在上边受拉的三角形 ω_1 和一个在下边受拉的抛物线 ω_2。图形的面积和纵坐标计算如下。

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\cdot l\cdot ql^2 = \frac{1}{2}ql^3,\quad y_1 = \frac{2}{3}l\ (y_1 与 \omega_1 同侧)$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{12}ql^3，\quad y_2 = \frac{1}{2}l\ (y_2 与 \omega_2 反侧)$$

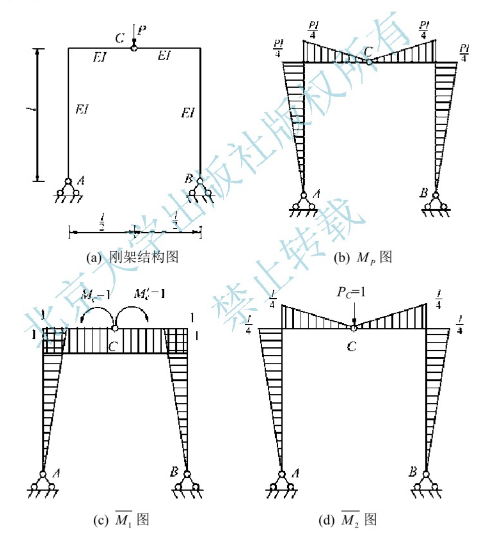
所以

$$\Delta_B = \int \frac{\bar{M}M_P \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI}(\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}ql^3 \times \frac{2}{3}l - \frac{1}{12}ql^3 \times \frac{1}{2}l\right)$$

$$= \frac{7ql^4}{24EI}(\downarrow)$$

【例 4-6】　求图 4.18(a)所示刚架结构铰 C 左右两侧截面的相对角位移 θ_{c-c} 和竖向位移 Δ_{cv}， EI 为常数。



(a) 刚架结构图　　(b) M_P 图

(c) $\overline{M_1}$ 图　　(d) $\overline{M_2}$ 图

图 4.18　求悬臂梁端点位移

解：(1) 作实际荷载作用下的 M_P 图，如图 4.18(b)所示。

(2) 在铰 C 左右两侧截面加一对反向的单位集中力偶，作 $\overline{M_1}$ 图，如图 4.18(c)所示。

(3) 用图乘法计算 θ_{c-c} 。

$$\theta_{c-c}=\frac{1}{EI}\times\left(-\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times l\times\frac{2}{3}\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times\frac{l}{2}\times 1\right)\times 2$$

$$=\frac{1}{EI}\times\left(-\frac{Pl^2}{12}-\frac{Pl^2}{16}\right)\times 2$$

$$=-\frac{7Pl^2}{24}\qquad(\curvearrowright\curvearrowleft)$$

(4) 在铰 C 截面加一单位竖向集中力，作 $\overline{M}_2$ 图，如图 4.18(d)所示。

(5) 用图乘法计算 Δ_{cv}。

$$\Delta_{cv}=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times l\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{Pl}{4}\times\frac{l}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{4}\right)\times 2$$

$$=\frac{1}{EI}\times\left(\frac{Pl^3}{48}+\frac{Pl^3}{96}\right)$$

$$=\frac{Pl^3}{32EI}(\downarrow)$$

4.5* 温度变化和支座下沉情况下的位移计算

1. 温度变化下的位移计算

图 4.19(a)所示结构，由于温度改变而变形，为了利用单位荷载法求得 C 点的竖向位移 Δ，可选取图 4.19(b)所示的虚拟状态，即在 C 点处加一个竖向的单位集中力，这时结构的内力用 $\overline{N}$、$\overline{Q}$、$\overline{M}$ 表示。

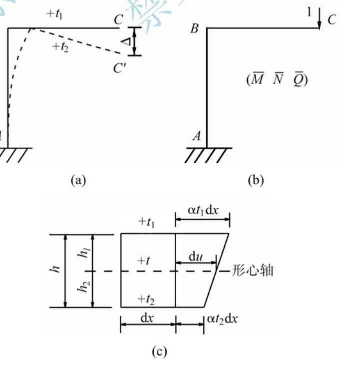


图 4.19　温度变化下的位移

由虚功原理有：

$$1\times\Delta=\sum\int\bar{M}\mathrm{d}\theta+\sum\int\bar{N}\mathrm{d}\lambda+\sum\int\bar{Q}\mathrm{d}\eta$$

式中 $\mathrm{d}\theta$ 、 $\mathrm{d}\lambda$ 、 $\mathrm{d}\eta=\gamma\mathrm{d}x$ 为实际状态中结构杆件微段 $\mathrm{d}x$ 由于上面温度升高 t_1 度，下面温度升高 t_2 度产生的变形[图 4.19(c)]。为了计算方便，假定温度是沿截面的厚度 h 按直线规律变化的，则在变形之后，截面仍将保持为平面。当杆件截面对称于形心轴时(即 $h_1=h_2$)，则形心轴处的温度 t 为：

$$t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$$

如果杆件截面不对称于形心轴(即 $h_1\neq h_2$)，则

$$t=\frac{t_1h_1+t_2h_1}{h}$$

若以 α 表示材料的线膨胀系数，则杆件微段 dx 由于温度改变所产生的变形为：

$$\mathrm{d}\lambda=\alpha t\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha(t_1-t_2)\mathrm{d}x}{h}=\alpha\frac{\Delta t}{h}\mathrm{d}x$$

式中 $\Delta t=t_1-t_2$ 为杆件上下两面温度改变之差。由于温度改变并不引起剪应变，即 $\gamma=0$ ，因此 $\mathrm{d}\eta=0$ 。

将以上变形代入虚功方程，则得：

$$\Delta=\sum(\pm)\alpha\int_l\bar{M}\frac{\Delta t}{h}\mathrm{d}x+\sum(\pm)\ \alpha\int_l\bar{N}t\mathrm{d}x \tag{4-10}$$

这就是静定结构由于温度改变所引起的位移的计算公式。应用时对于式中的正负符号(±)可按如下的办法来确定，即：比较实际状态与虚拟状态的变形，若二者变形方向相同，则取正号；反之，取负号。若每一杆件沿全长上的温度改变相同，且截面尺寸不变，则式(4-10)可写为：

$$\Delta=\sum(\pm)\ \alpha\frac{\Delta t}{h}\omega+\sum(\pm)\bar{N}\alpha tl \tag{4-11}$$

式中 l 为杆件的长度， ω 代表 $\bar{M}$ 图的面积。

必须指出，在计算由于温度改变所引起的位移时，不能略去轴向变形的影响。

【例 4-7】 求图 4.20(a)所示结构由于杆件一边的温度升高 10℃时，在 C 点所产生的竖向位移。各杆的截面相同且与形心轴对称。

解：在 C 点加一竖向单位力，算出各杆的轴力 $\bar{N}$ ，并绘出 $\bar{M}$ 图如图 4.20(b)和图 4.20(c)所示。图中虚线所示的弧形表示杆件弯曲的方向。可以看出各杆实际的弯曲变形方向都与虚拟的相反，且二杆的尺寸及温度改变都相同，故二杆的 ω 可合并计算。

$$\omega=l\times l+\frac{1}{2}l\times l=1.5l^2$$

$$t=\frac{1}{2}\left(t_1+t_2\right)=\frac{1}{2}\times10^\circ=5^\circ$$

$$\Delta t=\left|0^\circ-10^\circ\right|=10^\circ$$

以上各值均为绝对值，这是因为求温度改变所引起的位移时，其正负号将由变形方向

来决定。在目前情况下，温度改变将使竖柱伸长，而虚拟状态则使其压缩，故轴向变形的影响一项取负值；对弯曲的影响，在变形情况如前所述也应取负值。因此，由式(4-11) C 点的竖向位移为

$$\Delta = -15a\frac{l^2}{h} - 5al$$

(a) (b) (c)

图 4.20 例 4-7 图

2. 支座下沉情况下的位移计算

静定结构时几何不变无多余约束的体系，当有支座移动时，静定结构将发生刚体位移。因此，支座移动不引起应变，也不引起静定结构的内力。因此，静定结构支座移动时的位移计算，属于刚体体系的位移计算问题，当用单位荷载法计算时，位移的计算公式简化成如下的形式

$$\Delta = -\sum \overline{R}c \tag{4-12}$$

式中，c 为实际的支座移动；$\overline{R}$ 为与 $P=1$ 平衡的支座反力。

$\overline{R}c$ 是虚设力系的支座反力 $\overline{R}$ 在实际的相应支座移动 c 上所作的虚功；二者方向一致，乘积为正，反之为负。

用单位荷载法计算支座移动引起的位移步骤如下。

(1) 沿拟求 Δ 方向虚设相应的单位荷载。

(2) 求 $\overline{R}$，根据静力平衡条件求单位荷载作用下相应于支座移动 c 的支座反力 $\overline{R}$。

(3) 求 Δ，由式(4-12)计算 Δ。

【例 4-8】 图 4.21(a)所示简支刚架，支座 A 下沉 a，求 B 点的水平位移和 B 端截面的转角。

解：(1) 求 B 点的水平位移。

① 在 B 点加水平单位荷载 $P=1$，如图 4.21(b)所示。

② 由静力平衡条件，求支座反力 $\overline{R}_A$(图 4.21(b))。

③ 代入式(4-12)，得

$$\Delta = -\sum \overline{R}c = -\left(\frac{h}{l} \times a\right) = -\frac{ha}{l} \quad (\curvearrowright)$$

这里，支座反力 $\overline{R}_A$ 与支座移动 c_A 方向相同，乘积为正。

Δ 为负值，说明 B 点的实际水平位移与所设 $P=1$ 方向相反，即向左。

(2) 求 B 端截面的转角 θ_B。

① 在 B 端加相应于 θ_B 的单位力偶 $M=1$，如图 4.21(c)所示。

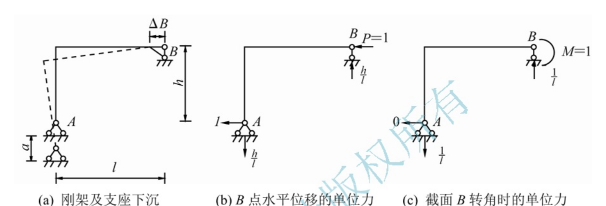
② 由静力平衡条件，求支座反力 $\bar{R}_A$(图 4.21(c))。

③ 代入式(4-12)，得

$$\Delta=-\sum\bar{R}c=-\left(\frac{1}{l}\times a\right)\ (\curvearrowleft)$$

这里，支座反力 $\bar{R}_A$ 与支座移动 c_A 方向相同，乘积为正。

Δ 为负值，说明 B 端截面的实际水平转动方向与所设单位力偶方向相反，即为逆时针



(a) 刚架及支座下沉　　(b) B 点水平位移的单位力　　(c) 截面 B 转角时的单位力

图 4.21　刚架由于支座下沉引起的位移

4.6 互 等 定 理

本章最后一节将介绍功的互等定理及其特例——位移互等定理和反力互等定理。这些定理在位移计算及超静定结构的计算中是有用的，也是今后进一步学习研究其他有关内容的一个基础。

1. 功的互等定理

图 4.22(a)和图 4.22(b)所示为一弹性结构分别承担两组外力 P_1 和 P_2 的两种状态。设以 M_1、Q_1、N_1 代表第一组力 P_1 所产生的各项内力，以 M_2、Q_2、N_2 代表第二组力 P_2 所产生的各项内力。现在来研究这两组力按不同次序先后作用在结构上时所引起的虚功，并由此推出功的互等定理。

如图 4.22(c)所示，若先施加力 P_1，等达到弹性平衡后，再施加力 P_2，此时，如以 W_{12} 代表第一组外力由于第二组力 P_2 的影响所作的虚功，则由虚功原理有：

$$\begin{aligned}W_{12}&=\sum\int M_1\mathrm{d}\theta_2+\sum\int N_1\mathrm{d}\lambda_2+\sum\int Q_1\mathrm{d}\eta_2\\&=\sum\int M_1\frac{M_2}{EI}\mathrm{d}x+\sum\int N_1\frac{N_2}{EA}\mathrm{d}x+\sum k\int Q_1\frac{Q_2}{GA}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{a}$$

再看图 4.22(d)，若先施加力 P_2，等达到弹性平衡后，再施加力 P_1，此时，如以 W_{21} 代表第二组外力由于第一组力 P_1 的影响所做的虚功，则由虚功原理有：

$$W_{21} = \sum\int M_2 \mathrm{d}\theta_1 + \sum\int N_2 \mathrm{d}\lambda_1 + \sum\int Q_2 \mathrm{d}\eta_1$$
$$= \sum\int M_2 \frac{M_1}{EI}\mathrm{d}x + \sum\int N_2 \frac{N_1}{EA}\mathrm{d}x + k\int Q_2 \frac{Q_1}{GA}\mathrm{d}x \tag{b}$$

比较式(a)和(b)可知：

$$W_{12} = W_{21} \tag{4-13}$$

或写为：

$$\sum P_1 \cdot \Delta_{12} = \sum P_2 \cdot \Delta_{21} \tag{4-14}$$

其中 Δ_{12} 及 Δ_{21} 分别代表与 P_1 及 P_2 相应的位移。总和号 $\sum$ 表示包括结构上全部的外力所做的虚功。

上面所得到的公式就是功的互等定理，可叙述如下：第一状态的外力在第二状态的位移上所做的虚功，等于第二状态的外力在第一状态的位移上所做的虚功。

功的互等定理对于任何弹性结构都是普遍适用的，在两种状态中也可以包括支座移动在内，不过在计算外力的虚功时也必须把反力的虚功包括在内。

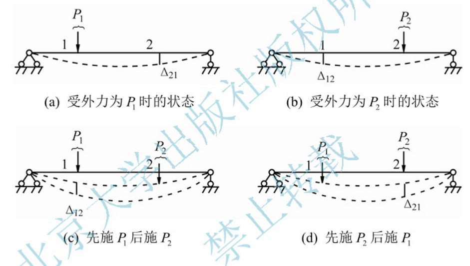


图 4.22　外力虚功计算图

2. 位移互等定理

应用上述功的互等定理，我们来看看一种特殊情况，设两个状态中的荷载都只是一个单位集中力，即 $\overline{P}_1 = 1$，$\overline{P}_2 = 1$，如图 4.23 所示。

则由功的互等定理可得：

$$1 \cdot \Delta_{12} = 1 \cdot \Delta_{21}$$

由于这里的 Δ_{12} 和 Δ_{21} 都是由单位力引起的，为了便于识别，用小写字母 δ_{12} 和 δ_{21} 表示，于是有：

$$\delta_{12} = \delta_{21} \tag{4-15}$$

这就是位移互等定理。即第一个单位力所引起的第二个单位力作用点沿其方向上的位移，等于第二个单位力所引起的第一个单位力作用点沿其方向上的位移。

在这里，单位力是广义单位力即也可以是单位力偶，位移是广义位移即也可以是角位移。

譬如图 4.24 所示简支梁的两个状态中，根据位移互等定理，可知必有：

$$\varphi_A = f_c$$

即 c 点的单位垂直力使 A 截面产生角位移，在数值上等于 A 截面的单位力偶使 c 点产生的垂直位移。事实上，由图乘法我们可以容易地算得：

$$\varphi_A = \frac{Pl^2}{16EI} = \frac{l^2}{16EI}\ (\text{弧度}) \qquad (\text{因为}\ P=1)$$

$$f_c = \frac{Ml^2}{16EI} = \frac{l^2}{16EI}\ (\text{长度}) \qquad (\text{因为}\ M=1)$$

可见 $\varphi_A = f_c$，两者单位虽不同，但数值是相等的。

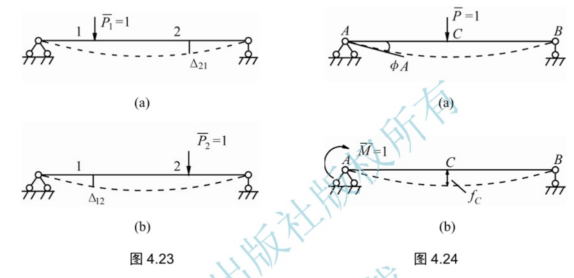


图 4.23　　图 4.24

3. 反力互等定理

反力互等定理也是功的互等定理的一种特殊情况。它用来说明超静定体系在两个支座分别产生单位位移时，这两种状态中反力的互等关系。设在图 4.25(a)中，超静定梁的支座 1 发生单位位移 $\Delta_1 = 1$ 时，使支座 2 产生的反力为 r_{21}；又设在图 4.25(b)中，超静定梁的支座 2 发生单位位移 $\Delta_2 = 1$ 时，使支座 1 产生的反力为 r_{12}，则由功的互等定理有：

$$r_{21} \cdot \Delta_2 = r_{12} \cdot \Delta_1$$

由于 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$，所以

$$r_{21} = r_{12} \tag{4-16}$$

上式表明：在超静定结构中，支座 1 的单位位移使支座 2 产生的反力(r_{21})，在数值上等于支座 2 的单位位移使支座 1 产生的反力(r_{12})。这个关系就叫反力互等定理，它对超静定结构的任何两个支座都是适用的。

在图 4.26(a)和图 4.26(b)中，分别表示单跨超静定梁固定支座与链杆支座发生了单位位移 $\varphi_1 = 1$， $\Delta_2 = 1$，由反力互等定理可知：反力矩 r_{12} 和反力 r_{21}，虽然二者单位不同，但在数值上是相等的。

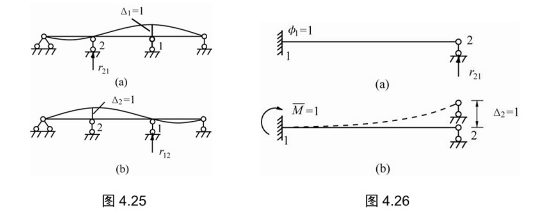


图 4.25　　图 4.26



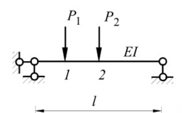
4.7 习　　题

1. 是非题(将判断结果填入括弧：以 O 表示正确，以×表示错误)

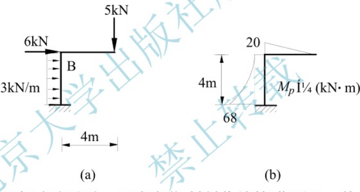
(1) 用图乘法可求得各种结构在荷载作用下的位移。　　(　　)

(2) 图示简支梁，当 $P_1=1$，$P_2=0$ 时，*1* 点的挠度为 $0.0165l^3/EI$，*2* 点挠度为 $0.077l^3/EI$。当 $P_1=0$，$P_2=1$ 时，则 *1* 点的挠度为 $0.021l^3/EI$。

(　　)



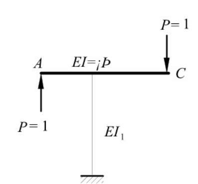
(3) 已知图(a)所示刚架的 M_P 图如图(b)，各杆 EI=常数，则结点 B 的水平位移为：$\Delta_{BH}=[1/(EI)]\times[20\times4\times(1/2)\times4+(1/3)\times4\times48\times(3/4)\times4]=352/(EI)(\rightarrow)$。　　(　　)



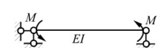
(a)　　(b)

(4) 在非荷载因素(支座移动，温度变化,材料收缩等)作用下，静定结构不产生内力，但会有位移，且位移只与杆件相对刚度有关。　　(　　)

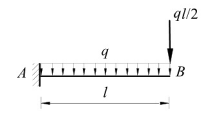
(5) 图示为刚架的虚设力系，按此力系及位移计算公式可求出杆 AC 的转角。 (　　)



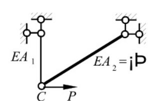
(6) 图示梁的跨中挠度为零。　　(　　)



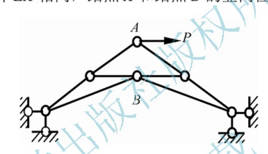
(7) 图示梁 AB 在所示荷载作用下的 M 图面积为 $ql^3/3$。　(　　)



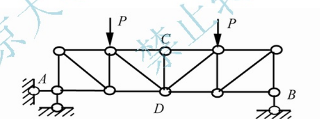
(8) 图示桁架结点 C 水平位移不等于零。　(　　)



(9) 图示对称桁架各杆 EA 相同，结点 A 和结点 B 的竖向位移均为零。　(　　)



(10) 图示桁架中，结点 C 与结点 D 的竖向位移相等。　(　　)

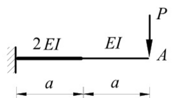


2. 选择题(将选中答案的字母填入括弧内)

(1) 图示结构 A 截面转角(设顺时针为正)为：　(　　)

A. $\dfrac{2Pa^2}{EI}$　　B. $\dfrac{-Pa^2}{EI}$

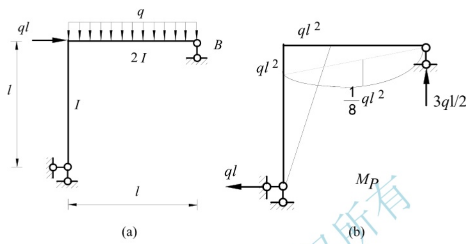
C. $\dfrac{5Pa^2}{4EI}$　　D. $\dfrac{-5Pa^2}{4EI}$



(2) 图(a)所示结构的 M_P 图示于图(b)，B 点水平位移$(\rightarrow)$为：　(　　)

A. $\dfrac{5ql^4}{24EI}$　　B. $\dfrac{25ql^4}{48EI}$

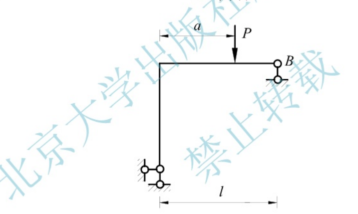
C. $\dfrac{48ql^4}{5EI}$　　D. $\dfrac{16ql^4}{32EI}$



(3) 图示刚架 $l>a>0$，B 点的水平位移是：　(　　)

A. 不定，方向取决于 a 的大小　　B. 向左

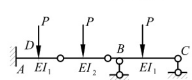
C. 等于零　　D. 向右



(4) 图示静定多跨梁，当 EI_2 增大时，D 点挠度：　(　　)

A. 不定，取决于 $\dfrac{EI_1}{EI_2}$　　B. 减小

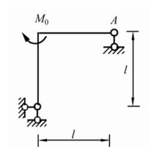
C. 不变　　D. 增大



(5) 图示刚架中杆长 l，EI 相同，A 点的水平位移为：　(　　)

A. $2M_0l^2/3EI(\rightarrow)$　　B. $M_0l^2/3EI(\rightarrow)$

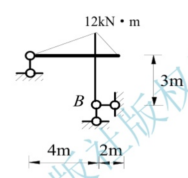
C. $2M_0l^2/3EI(\leftarrow)$　　D. $M_0l^2/3EI(\leftarrow)$



(6) 图示为结构在荷载作用下的 M_P 图，各杆 EI=常数，支座 B 截面处的转角为：(　　)

A. $\dfrac{16}{EI}$ (顺时针)　　　　B.0

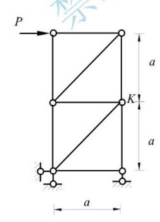
C. $\dfrac{8}{EI}$ (顺时针)　　　　D. $\dfrac{18}{EI}$ (顺时针)



(7) 图示桁架各杆 EA=常数，则结点 K 的水平位移($\rightarrow$)等于：(　　)

A. $\dfrac{2(1+\sqrt{2})Pa}{EA}$　　　　B. $\dfrac{4Pa}{EA}$

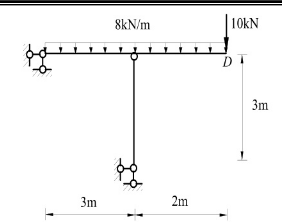
C. $\dfrac{(2+\sqrt{2})Pa}{EA}$　　　　D. $\dfrac{3Pa}{EA}$



(8) 图示结构的受弯杆件的抗弯刚度为 EI，链杆的抗拉(压)刚度为 EA，且 $A=I/(30\text{m}^2)$，则 D 端的转角(顺时针方向)为：(　　)

A. $\dfrac{223}{3EI}$　　　　B. $\dfrac{137}{3EI}$

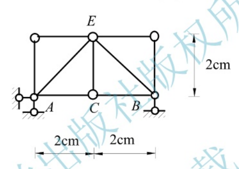
C. $\dfrac{4673}{3EI}$　　　　D. $\dfrac{1500}{EI}$



(9)　图示桁架，由于制造误差，AE 杆过长了 1cm，BE 杆过短 1cm，结点 E 的竖向位移为：　　(　　)

A. 0　　B. 0.05cm(↓)

C. 0.707cm(↓)　　D. 1.0cm(↓)



(10) 图示结构两个状态中的反力互等定理 $r_{12}=r_{21}$，r_{12} 和 r_{21} 的量纲为：　　(　　)

A. 力　　B. 无量纲

C. 力/长度　　D. 长度/力

$\Delta_1=1$　r_{21}

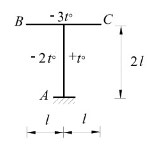
状态(1)

$\Delta_2=1$　r_{12}

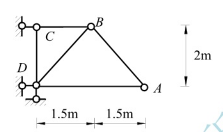
状态(2)

3. 填充题(将答案写在空格内)

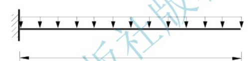
(1)　图示刚架材料膨胀线系数为 α，各杆为矩形截面，$h=l/20$，在图示温度变化情况下，B、C 两点的竖向相对位移为________________。



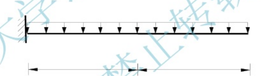
(2)　欲使 A 点的竖向位移与正确位置相比误差不超过 0.6 cm，杆 BC 长度的最大误差 λ_{max} = ________________，设其他各杆保持精确长度。



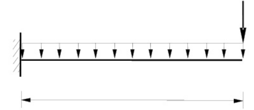
4. 试求图示结构指定点 B 的竖向位移，EI=常数。



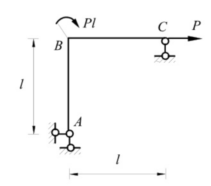
5. 试求图示结构指定点 K 的竖向位移，EI=常数。



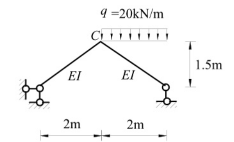
6. 试求图示结构自由端 B 的竖向位移，EI=常数。



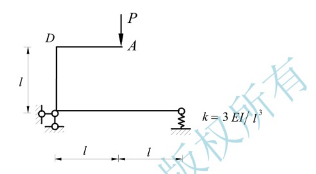
7. 求图示结构(EI=常数)C 点水平位移。



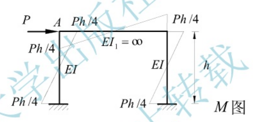
8. 已知各杆 $EI = 2.1\times10^4\ \mathrm{kN\cdot m^2}$，求图示刚架 C 结点的竖向位移 Δ_{CV}。



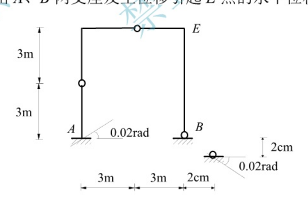
9. 求图示结构 D 点水平位移 Δ_{DH}，EI=常数。



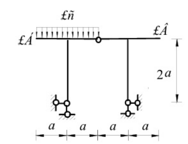
10. 已知图示结构 M 图，求 A 点水平位移。



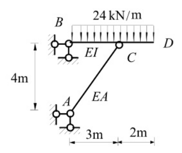
11. 计算图示结构由 A、B 两支座发生位移引起 E 点的水平位移。



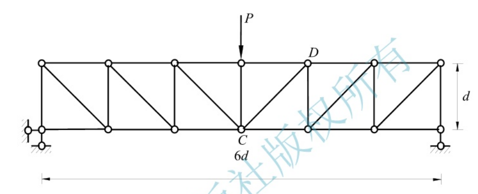
12. 求图示结构 A、B 相对竖向线位移，EI＝常数，a=2m。



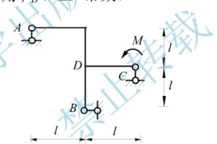
13.　图示结构，已知 AC 杆的 $EA = 4.2\times10^5\,\text{kN}$，$BCD$ 杆的 $EI = 2.1\times10^8\,\text{kN}\cdot\text{cm}^2$，试求截面 D 的角位移。



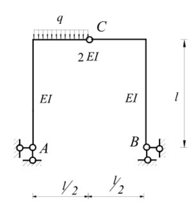
14. 计算图示桁架 CD 杆的转角，各杆 EA 相同。



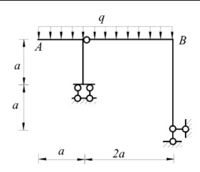
15. 求图示结构 D 截面的转角 φ_D，EI=常数。



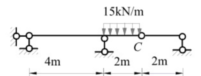
16. 试求图示结构铰 C 两侧截面的相对转角 φ_C。



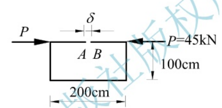
17. 计算图示结构 A、B 两截面相对角位移，EI=常数。



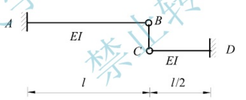
18. 试求图示静定梁铰 C 左、右两侧截面的相对转角 φ_C，各杆 EI =常数。



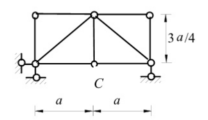
19. 图示结构在 A 和 B 处相距 δ，试绘当 δ 分别为：(a)1cm；(b)0.1cm；(c)0 时的内力图，$EI = 48\times10^7\,\text{kN/cm}^2$。



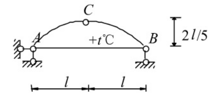
20. 图示等截面悬臂梁 AB 与 CD，由弹性杆 BC 相联。已知当竖向荷载 P 作用于 B 点时，C 点竖向位移为 a。求当该荷载作用于 C 点时，C 点的竖向位移。



21. 图示桁架各杆温度均匀升高 t℃，材料线膨胀系数为 α，试求 C 点的竖向位移。



22. 图示结构拉杆 AB 温度升高 t℃，材料线膨胀系数为 α，计算 C 点的竖向位移。



第 5 章　力　　法

教学提示：学习力法的基本原理，首先应深刻理解将超静定问题转化为静定问题解决的基本思想，理解基本体系的桥梁作用。这是掌握力法的基础。了解超静定结构与静定结构在受力特性上的异同点。

教学要求：充分理解和掌握力法的基本原理。能熟练确定超静定次数，理解力法基本方程的物理意义，能熟练运用力法计算简单超静定结构(梁、刚架、桁架、排架、组合结构和拱结构)在荷载作用力下产生的内力；会计算超静定结构在温度改变和支座移动影响下的内力。会计算超静定结构的位移；了解超静定结构内力图的校核方法，及超静定结构的力学特性。

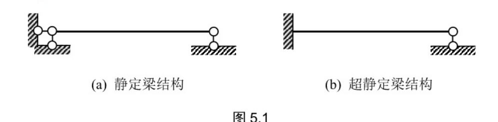
5.1　超静定结构的概念和超静定次数

5.1.1　超静定结构的概念

在前面各章节中，介绍了静定结构的内力及变形的计算。从受力分析角度看，静定结构的支座反力及内力可根据静力平衡条件全部确定；从几何构造分析角度看，静定结构为几何不变体系且无多余约束，如图 5.1(a)所示。

在工程应用中还有另一类结构，从受力分析角度看，其支座反力及内力通过平衡条件无法完全确定；从几何构造分析角度看，结构为几何不变体系，但体系内存在多余约束，如图 5.1(b)所示结构。我们把这类结构称之为超静定结构。

内力是超静定的且结构内有多余约束是超静定结构区别于静定结构的基本特征。



(a) 静定梁结构　　　　(b) 超静定梁结构

图 5.1

在工程应用中，超静定结构大致分为以下几种的类型。

(1) 超静定梁结构。

分为超静定单跨梁结构和超静定多跨连续梁结构，如图 5.1 和图 5.2 所示。

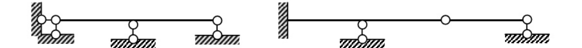


图 5.2　超静定梁结构

(2) 超静定刚架(图 5.3)。

(3) 超静定桁架(图 5.4)。

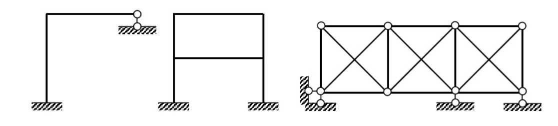


图 5.3 超静定刚架　　图 5.4 超静定桁架

(4) 超静定组合结构(图 5.5)。

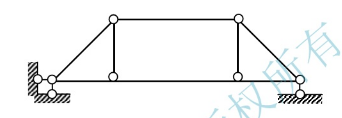
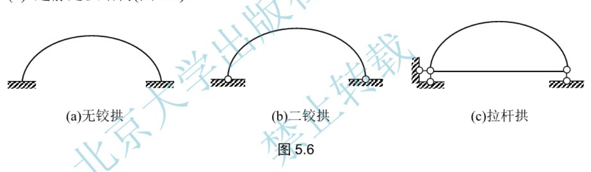


图 5.5　超静定组合结构

(5) 超静定拱结构(图 5.6)。



(a)无铰拱　(b)二铰拱　(c)拉杆拱

图 5.6

5.1.2　超静定次数

超静定结构中多余约束的个数，称为超静定次数。

确定超静定次数最直接的方法为：去除多余约束法。去除结构中的多余约束使原超静定结构变成一个几何不变且无多余约束的体系。此时，去除的多余约束的个数即为原结构的超静定次数。

去除多余约束的方法以几何组成分析的基本规则为基础，大致有下列几种方法。

(1) 去除或切断一根链杆，相当于去除一个约束。

(2) 去除一个固定铰支座或去除一个单铰，相当于去除两个约束。

(3) 去除一个固定支座或切断一根梁式杆，相当于去除 3 个约束。

(4) 将刚性联结变为单铰联结，相当于去除一个约束。

对同一超静定结构，去除多余约束的方式是多种多样的，相应得到的静定结构的形式也不相同。但不论何种方法，所得到的超静定次数是相同的，如图 5.7 所示。

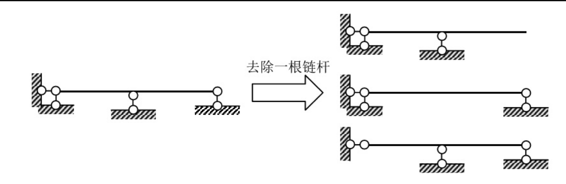


图 5.7　除去多余约束的方式

去除多余约束时，应特别注意以下两点。

(1)　所去除的约束必须是多余的，去除约束后所得到的结构不能为几何可变体系。如图 5.7 中的结构，如错误去掉该结构左端的水平约束链杆，则结构变为几何可变体系。

(2)　必须去除结构内所有的多余约束。在图 5.8(a)中，如果只去除一根链杆，如图 5.8(b)所示，其闭合框结构中，仍含有 3 个多余约束。因此，必须断开闭合框的刚性连接，如图 5.8(c)所示，才能去除全部的多余约束。

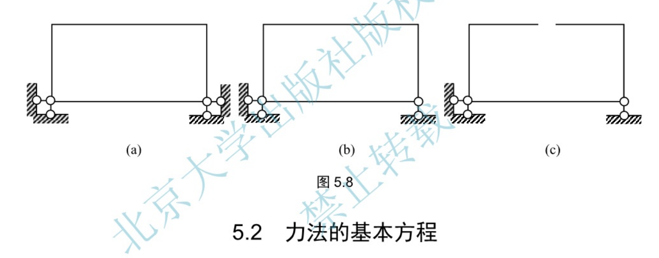


图 5.8

5.2　力法的基本方程

超静定结构的内力计算最基本的两种方法为：力法和位移法。此外还有派生出的一些方法，如力矩分配法等。本章中介绍力法的基本原理。

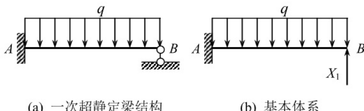
5.2.1　力法的基本方程

在采用力法解超静定问题时，我们不是孤立地研究超静定问题，而是利用静定结构与超静定结构之间的联系，从中找到由静定问题过渡到超静定问题的途径，从已知的静定结构问题过渡到未知的超静定结构问题。

下面以一次超静定梁为例，说明力法的基本原理。

图 5.9(a)所示一次超静定梁结构，杆长为 l，EI＝常数。

去多余约束后，并代之以相应的多余约束力 X_1，结构形式变为图 5.9(b)所示的悬臂梁，承受均布荷载 q 和多余约束力 X_1 的共同作用。



(a) 一次超静定梁结构　　(b) 基本体系

图 5.9

这种去除多余约束并以相应多余约束力来代替所得到的静定结构称为 力法的基本体系。

基本体系本身既为静定结构，又可代表原超静定结构的受力特点，它是从静定结构过渡到超静定结构的桥梁。

在基本体系中，如果多余约束力 X_1 的大小可以确定，则基本体系的内力可解。此时，多余约束力 X_1 的求解成为解超静定问题的关键，称之为力法的基本未知量。

力法基本未知量 X_1 的求解，显然已不能利用平衡条件，因此，必须增加补充条件——变形协调。

考虑原结构与基本体系在变形上的异同点：

在原结构中 X_1 为被动力，是固定值，与 X_1 相应的位移也是唯一确定的，在本例题中为零。

在基本体系中，X_1 为主动力，大小是可变的，相应的变形也是不确定的。当 X_1 值过大时，B 点上翘；如果过小，B 点下垂。只有当 B 点的变形与原结构的变形相同时，基本体系中的主动力 X_1 大小才与原结构中的被动力 X_1 相等，这时基本体系才能真正转化为原来的超静定结构。

因此，基本体系转化为原超静定结构的条件是：基本体系沿多余约束力 X_1 方向的位移 Δ_1 应与原超静定结构相应的位移相同，即：

$$\Delta_1 = 0 \tag{5-1}$$

这个条件就是计算力法基本未知量时的变形协调方程。

在线性体系条件下，基本体系沿基本未知量 X_1 方向的位移可利用叠加原理进行展开为基本体系在荷载 q 和 X_1 单独作用下的两种受力状态，如图 5.10 所示。因此，变形条件可表示为：

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0 \tag{5-2}$$

其中，

Δ_1——基本结构在荷载和基本未知量 X_1 共同作用下沿 X_1 方向的总位移；

Δ_{1P}——基本结构在荷载单独作用下沿 X_1 方向产生的位移；

Δ_{11}——基本体系在基本未知量 X_1 单独作用下沿 X_1 方向产生的位移。根据叠加原理，位移与力成正比，将其比例系数用 δ_{11}(在 $X_1=1$ 单独作用下，基本结构沿 X_1 方向产生的位移)来表示，可写成：

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1 \tag{5-3}$$

将式(5-3)代入式(5-2)，可得：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \tag{5-4}$$

上式即为一次超静定结构的力法基本方程。方程中的系数 δ_{11} 和自由项 Δ_{1P} 均为基本结构的位移。在第 4 章中，我们已经学习了其计算方法——单位荷载法。

作出基本结构在荷载作用下的弯矩图 M_P 和单位力 $X_1=1$ 作用下的弯矩图 $\overline{M}_1$，应用图乘法，可得：

$$\delta_{11} = \sum\int \frac{\bar{M}_1^{\,2}}{EI}\mathrm{d}s = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = \sum\int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI}\mathrm{d}s = -\frac{ql^4}{8EI}$$

代入式(5-4)求解，可得：

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql$$

所得 X_1 为正值时，表示基本未知量的方向与假设方向相同；如为负值，则方向相反。

基本未知量确定后，基本体系的内力状态即可利用平衡方程求解，作出内力图。由于已经作出 M_P 和 $\overline{M}_1$ 图，所以利用叠加原理绘制原超静定结构的内力图更为方便快捷。

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$$

同理，可得剪力图：

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + Q_P$$

图 5.10　力法分析过程

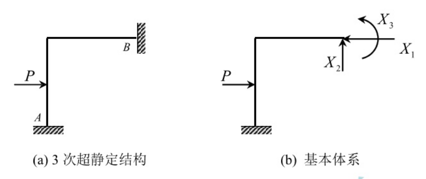
5.2.2　典型方程

上面以一次超静定问题为例介绍了力法的基本原理。在力法解超静定问题中，力法的基本未知量——多余约束力的求解是解决超静定问题的关键。对于多次超静定问题，力法

的基本原理也完全相同。

如图 5.11(a)所示 3 次超静定结构，杆长均为 l 。

选取支座 B 点处的 3 个多余约束力作为基本未知量 X_1、X_2 及 X_3，则力法的基本体系如图 5.11(b)所示。



(a) 3 次超静定结构　　(b) 基本体系

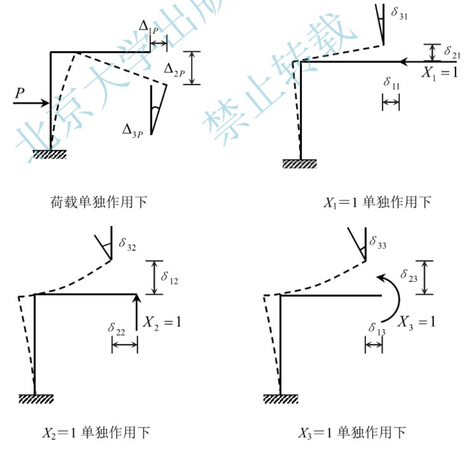
图 5.11

此时，变形协调条件为基本体系在点 B 处，沿 X_1、X_2，X_3 方向的位移与原结构相同，均为零。因此，可写成：

$$\Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = 0 \quad \Delta_3 = 0 \tag{5-5}$$

其中，Δ_i 为基本体系沿 X_i 方向的位移(i=1，2，3)。

应用叠加原理，将式(5-5)展开(图 5.12)，并设：



荷载单独作用下　　X_1＝1 单独作用下

X_2＝1 单独作用下　　X_3＝1 单独作用下

图 5.12

Δ_{iP} ——荷载单独作用下，沿 X_i 方向产生的位移(i=1，2，3)；

δ_{ji}——基本未知量 $X_i=1(i=1，2，3)$单独作用下，沿 $X_j(j=1，2，3)$方向产生的位移，根据叠加原理，X_i 单独作用下，相应产生的位移为 $\delta_{ji}X_i$。

则式(5-5)可展开为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1=\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0\\ \Delta_2=\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0\\ \Delta_3=\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

上式即为 3 次超静定结构的力法基本方程。

解方程，求出基本未知量后，即可求解原结构的内力状态，作出内力图。

利用叠加原理，原结构弯矩图可由下式计算：

$$\left.\begin{aligned}M=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+\bar{M}_3X_3+M_P\\ N=\bar{N}_1X_1+\bar{N}_2X_2+\bar{N}_3X_3\quad N_P\\ Q=\bar{Q}_1X_1+\bar{Q}_2X_2+\bar{Q}_3X_3+Q_P\end{aligned}\right\}$$

在超静定结构的力法计算中，同一结构可按不同方式选取基本体系和基本未知量。此时，力法的基本方程虽然形式相同，但由于基本未知量不同，因而，所提供的变形条件也不同。相应地，建立的力法基本方程的物理意义也有所区别。在选取基本体系时，应尽量使系数 δ_{ji} 及自由项 Δ_{iP} 的计算简化。

同理，推广至 n 次超静定结构，此时的力法基本未知量为 n 个多余约束力 $X_i(i=1，2，\cdots，n)$；力法的基本结构是从原结构中去掉相应的多余约束力后得到的静定结构；力法的基本方程为在 n 个多余约束处的变形条件：基本体系沿多余约束力方向的位移与原结构相同，即 $\Delta_i=0(i=1，2，\cdots，n)$。

在线性结构中，利用叠加原理，力法的典型方程可写为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1=\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0\\ \Delta_2=\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0\\ \cdots\cdots\qquad\qquad\qquad\qquad\\ \Delta_n=\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

其中，$\Delta_{iP}(i=1，2，\cdots，n)$——基本结构在荷载单独作用下，产生的沿 X_i 方向的位移；

δ_{ij} $(i=1，2，\cdots，n；j=1，2，\cdots，n)$——基本结构在 $X_j=1$ 单独作用下，产生的沿 X_i 方向的位移，称之为柔度系数。由叠加原理，X_j 作用下产生的位移为 $\delta_{ij}X_j$。

解方程，得出基本未知量后，超静定结构的内力可由平衡条件求出。一般情况下，按叠加原理作内力图较为简便：

$$\left.\begin{aligned}M=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+\cdots\cdots+\bar{M}_nX_n+M_P\\ Q=\bar{Q}_1X_1+\bar{Q}_2X_2+\cdots\cdots+\bar{Q}_nX_n+Q_P\\ N=\bar{N}_1X_1+\bar{N}_2X_2+\cdots\cdots+\bar{N}_nX_n+\bar{N}_P\end{aligned}\right\}$$

将式(5-7)写成矩阵形式，得：

$$[\delta]\{X\}+\{\Delta_P\}=0$$

其中，

$\{X\}=\{X_1\ ,\ ,X_2\quad\cdots\quad X_n\}^T$——力法基本未知量列向量；

$\{\Delta_P\}=\{\Delta_{1P},\ \Delta_{2P}\ \ \cdots\ \ \Delta_{nP}\}^T$——荷载单独作用下，沿 X_i 方向产生的位移列向量(i=1，2，⋯，n)；

$$[\delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{21} & \cdots & \delta_{n1}\\ \delta_{12} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{n2}\\ \cdots & & & \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}$$——柔度系数矩阵。

根据位移互等定理，系数 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，所以该矩阵为对称阵。主对角线上元素 δ_{ii} 称为主元素，值恒为正。非对角线元素 δ_{ij} 称为副系数，可为正值、负值或零。

5.3　荷载作用下超静定结构的力法计算

应用力法计算超静定结构，一般步骤为：

(1) 选择力法的基本未知量。

(2) 建立力法典型方程。

(3) 计算系数及自由项。

(4) 求解典型方程，得出基本未知量。

(5) 作内力图。

5.3.1　超静定梁

计算静定梁位移时，通常忽略轴力和剪力的影响，只考虑弯矩的影响。因而系数及自由项按下列公式计算：

$$\delta_{ii}=\sum\int\frac{\bar{M}_i^{\,2}}{EI}\mathrm{d}s,\quad \delta_{ij}=\sum\int\frac{\bar{M}_i\bar{M}_j}{EI}\mathrm{d}s,\quad \Delta_{iP}=\sum\int\frac{\bar{M}_iM_P}{EI}\mathrm{d}s$$

【例 5-1】　试作图 5.13(a)所示超静定连续梁的弯矩图，EI=常数。

(1) 选择力法基本未知量。

图示结构为一次超静定，基本未知量选择支座 C 处的多余约束。则基本体系如图 5.13(b)所示。

(2) 力法典型方程为：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(3) 计算系数及自由项，作出 M_P、$\bar{M}_1$ 图：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times 2l\times\frac{2}{3}l\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}l+\frac{1}{2}\times l\times\frac{2}{3}l\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}l\times 2\right)=\frac{16l^3}{27EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Pl\times l\times\frac{4}{9}l+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Pl\times l\times\frac{4}{9}l\quad\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}Pl\times l\times\frac{2}{9}l\right.$$
$$\left.+l\times\frac{1}{3}Pl\times\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Pl\times l\times\frac{4}{9}l\right)$$
$$=-\frac{25Pl^3}{54EI}$$

(4) 求解典型方程，得出基本未知量：

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 0.781P$$

正值说明基本未知量方向与假设方向一致。

(5) 作弯矩图，见图 5.13(e)。

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$$

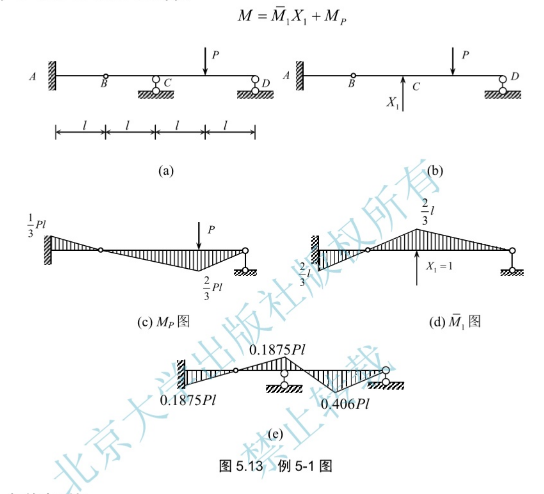


图 5.13　例 5-1 图

5.3.2　超静定刚架

计算刚架位移时，通常忽略轴力和剪力的影响，只考虑弯矩的影响。因而系数及自由项可按下式计算：

$$\delta_{ii} = \sum\int\frac{\bar{M}_i^2}{EI}\mathrm{d}s,\quad \delta_{ij} = \sum\int\frac{\bar{M}_i\bar{M}_j}{EI}\mathrm{d}s,\quad \Delta_{iP} = \sum\int\frac{\bar{M}_i M_P}{EI}\mathrm{d}s$$

在某些特殊情况下，当轴力及剪力的影响较大时，应特殊处理，考虑剪力及轴力的影响。如在高层刚架的柱中轴力通常较大，当柱短而粗时剪力影响较大。

【例 5-2】　试作图 5.14(a)所示超静定刚架的内力图。

(1) 选择力法的基本未知量，如图 5.14(b)所示。

(2) 力法典型方程为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0\\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0\end{aligned}\right\}$$

(3) 计算系数及自由项，作出 M_P、$\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 图：

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}\times l\right)+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}\times l\right)=\frac{l^3}{3}\left(\frac{1}{EI_1}+\frac{1}{EI_2}\right)$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}\times l\right)=\frac{l^3}{3EI_2}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{1}{3}\times l\right)=-\frac{l^3}{6EI_2}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}Pl\times\frac{1}{6}l\right)=\frac{Pl^3}{48EI_2}$$

$$\Delta_{2P}=-\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}Pl\times\frac{5}{6}l\right)=-\frac{5Pl^3}{48EI_2}$$

(4) 代入力法典型方程，整理得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{EI_1}\left(\frac{l^3}{3}X_1\right)+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{l^3}{3}X_1-\frac{l^3}{6}X_2+\frac{Pl^3}{48}\right)=0\\&\frac{1}{EI_2}\left(-\frac{l^3}{6}X_1+\frac{l^3}{3}X_2-\frac{5Pl^3}{48}\right)=0\end{aligned}\right\}$$

上式，同时乘以 EI_2/l^3 后，整理得：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{EI_2}{EI_1}\left(\frac{1}{3}X_1\right)+\frac{1}{3}X_1-\frac{1}{6}X_2+\frac{P}{48}=0\\&-\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2-\frac{5P}{48}=0\end{aligned}\right\}$$

可以看出，在荷载作用下，超静定刚架的内力求解只与各杆刚度的相对比值有关，而与各杆刚度的绝对值无关。

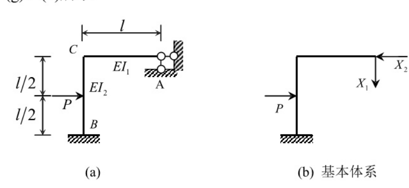
令 $\frac{EI_2}{EI_1}=1$，求解可得：$X_1=0.054P$，$X_2=0.34P$

正值说明基本未知量方向与假设方向相同。

(5) 作内力图：

$$\left.\begin{aligned}M&=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+M_P\\N&=\bar{N}_1X_1+\bar{N}_2X_2+N_P\\Q&=\bar{Q}_1X_1+\bar{Q}_2X_2+Q_P\end{aligned}\right\}$$

如图 5.14(f)、(g)、(h)所示。



(a)　　(b) 基本体系

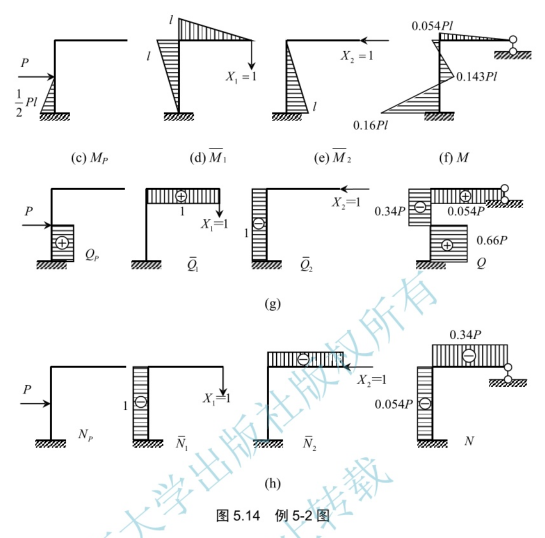


图 5.14　例 5-2 图

5.3.3　超静定桁架

由于桁架杆件中只产生轴力，因此，在计算系数和自由项时只需考虑轴力的影响，故：

$$\delta_{ii}=\sum\frac{\overline{N}_i^2 l}{EA},\quad \delta_{ij}=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j l}{EA},\quad \Delta_{iP}=\sum\frac{\overline{N}_i N_p l}{EA}$$

桁架杆件的轴力图，同样可由叠加原理求得：

$$N=\overline{N}_1X_1+\overline{N}_2X_2+\dots+\overline{N}_nX_n+N_P$$

【例 5-3】　求解图 5.15(a)所示超静定桁架结构的内力，各杆 EA=常数。

(1) 选择基本未知量，见图 5.15(b)。

(2) 力法典型方程为：$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$。

(3)　计算系数及自由项，由于桁架结构通常由多根杆件组成，为便于计算及检验，采用表格形式计算系数及自由项，求出 N_P、$\overline{N}_1$ 后填入表 5-1 中。

表 5-1

杆件	$\bar{N}_1$	N_P	l	$\bar{N}N_P l$	$\bar{N}_1^2$	$N=\bar{N}X_1+N_P$
AB	1	P	a	Pa	a	$0.5P$
BC	1	0	a	0	a	$-0.5P$
CD	1	0	a	0	a	$-0.5P$
DA	1	P	a	Pa	a	$0.5P$
AC	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}a$	0	$2\sqrt{2}a$	$0.707P$
BD	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}a$	$2\sqrt{2}Pa$	$2\sqrt{2}a$	$-0.707P$
$\sum$				$\left(2\sqrt{2}+2\right)Pa$	$\left(4\sqrt{2}+4\right)a$	

(4) 求解典型方程，得出基本未知量：

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{\left(2\sqrt{2}+2\right)P_a}{\left(4\sqrt{2}+4\right)a}=-\frac{1}{2}P\ (\text{压力})$$

(5) 叠加法求轴力，见表 1 最后一列。

$$N=\bar{N}_1X_1+N_P$$

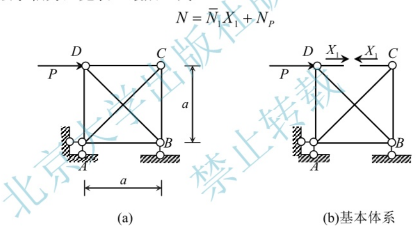


图 5.15　例 5-3 图

5.3.4　超静定组合结构

在实际工程中，为节约材料，提高结构的刚度，有时会采用超静定组合结构。结构中一部分杆件主要承受弯曲变形，称为梁式杆；另一部分杆件主要承受拉压变形，称为桁架杆。

计算系数及自由项时应根据杆件的类型，采用不同方式的计算。

梁式杆，主要考虑弯矩的影响：

$$\delta_{ii}=\sum\int\frac{\bar{M}_i^2}{EI}\mathrm{d}s，\quad \delta_{ij}=\sum\int\frac{\bar{M}_i\bar{M}_j}{EI}\mathrm{d}s，\quad \Delta_{iP}=\sum\int\frac{\bar{M}_iM_P}{EI}\mathrm{d}s$$

桁架杆，考虑轴力的影响：

$$\delta_{ii}=\sum\frac{\bar{N}_i^2 l}{EA}，\quad \delta_{ij}=\sum\frac{\bar{N}_i\bar{N}_j l}{EA}，\quad \Delta_{iP}=\sum\frac{\bar{N}_iN_p l}{EA}$$

【例 5-4】 试分析图 5.16(a)所示组合结构的内力，$EI=2\times10^7\text{N}\cdot\text{m}^2$，$EA=2.4\times10^8\text{N}\cdot\text{m}^2$。

(1) 选择基本未知量如图 5.16b 所示。

(2) 力法典型方程为：$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$ 。

(3) 计算系数及自由项，作出M_P、N_P、$\bar{M}_1$、$\bar{N}_1$图，如图 5.16(c)和图 5.16(d)所示。

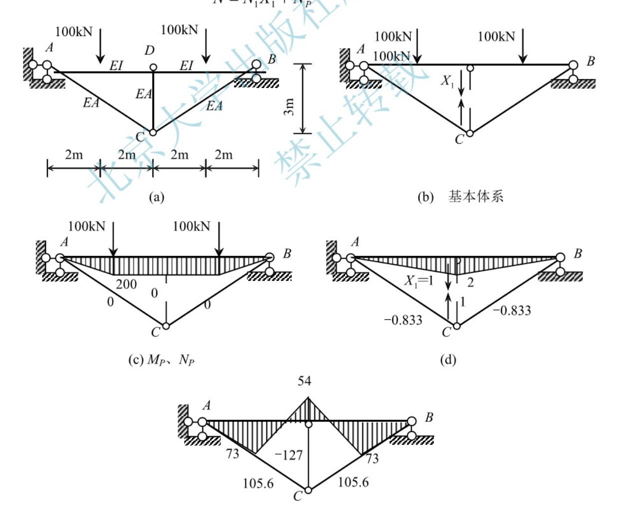
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{4}{3}\times2\right)+\frac{1}{EA}\left(0.833\times0.833\times5\times2+1\times1\times3\right)$$
$$=5.71\times10^{-7}$$
$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times2\times200\times\frac{2}{3}\times2+200\times2\times\frac{3}{2}\times2\right)=7.3\times10^{-5}$$

(4) 求解典型方程，得出基本未知量：

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-127\text{kN}\ (\text{压力})$$

(5)叠加法作内力图，如图 5.16(e)所示。

$$M=\bar{M}_1X_1+M_P$$
$$N=\bar{N}_1X_1+N_P$$

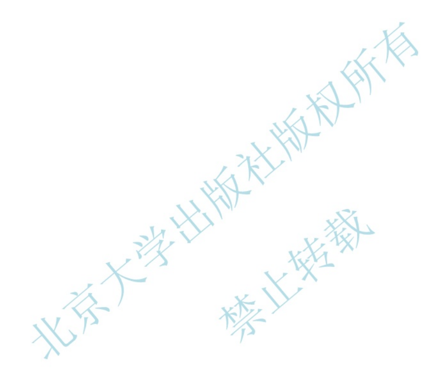


(a)　　(b) 基本体系

(c) M_P、N_P　　(d)

(e) 弯矩图(kN · m)轴力图(kN)

图 5.16　例 5-4 图

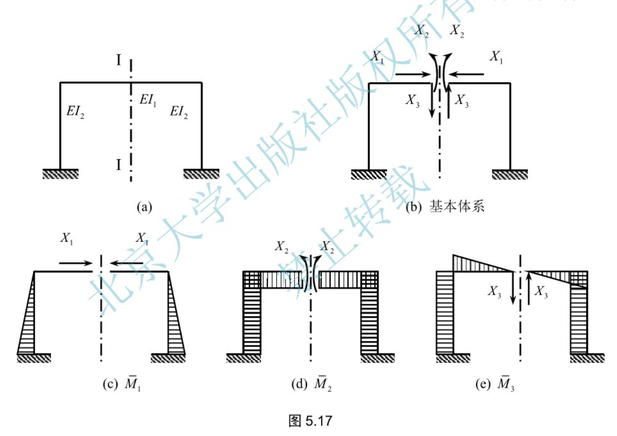


5.4　对称性的利用

采用力法计算超静定结构时，典型方程的个数等于超静定次数，超静定次数越高，需计算的系数及自由项个数越多，通常情况下，力法典型方程组为耦合的，计算工作量较大，因此，力法适合计算超静定次数较低的结构。

在工程实际中，很多结构存在如下特征：结构的几何形状、支座情况、杆件的截面以及材料特性等均关于某一几何轴线对称，这类结构称为对称结构，该几何轴线称之为对称轴。利用结构的对称性，超静定问题的计算工作可得到简化。

如图 5.17(a)所示刚架，沿轴 I-I 对称。在选取力法基本体系时，沿对称轴处将杆件切开，并代之以相应多余约束力，如图 5.17(b)所示。力法基本未知量为正对称的轴力 X_1、弯矩 X_2 以及反对称的剪力 X_3。基本未知量作用下的弯矩图，如图 5.17(c)、(d)、(e)所示。



(a)　(b) 基本体系

(c) $\bar{M}_1$　(d) $\bar{M}_2$　(e) $\bar{M}_3$

图 5.17

可看出，对称性基本未知量 X_1、X_2 作用下的弯矩图为对称图形，而反对称性基本未知量 X_3 作用下弯矩图为反对称的。由此特性，副系数

$$\delta_{13}=\delta_{13}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_3}{EI}\mathrm{d}s=0$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\int\frac{\bar{M}_2\bar{M}_3}{EI}\mathrm{d}s=0$$

则三次力法典型方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}$$

原耦合的方程组已简化为一个两元一次方程组和一元一次方程组，计算工作量已得到减少。

再来考虑结构所承受的荷载特性。

(1)　当结构承受对称荷载时，荷载作用下基本结构的弯矩图为对称图形，如图 5.18(a)所示。则自由项：

$$\Delta_{3P}=\int\frac{\bar{M}_3M_P}{EI}\mathrm{d}s=0$$

代入力法典型方程第三式，力法基本未知量 $X_3=0$，即反对称性基本未知量为零。因此，只有对称性基本未知量 X_1、X_2。最后弯矩图可由叠加法得：

$$\left.\begin{aligned}M&=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+M_P\\ N&=\bar{N}_1X_1+\bar{N}_2X_2+N_P\\ Q&=\bar{Q}_1X_1+\bar{Q}_2X_2+Q_P\end{aligned}\right\}$$

弯矩图为对称图形，但剪力图为反对称图形。

(2)　当结构承受反对称荷载时，荷载作用下基本结构的弯矩图为反对称图形，如图 5.18(b)所示。

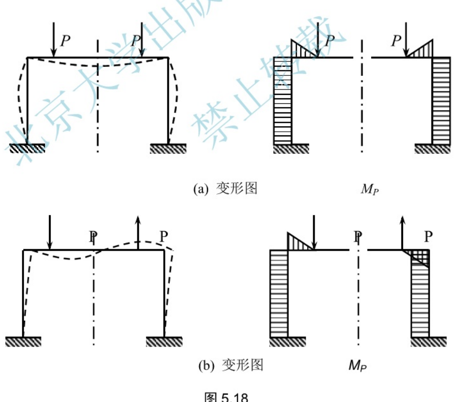


图 5.18

则自由项：$\Delta_{1P}=\int\frac{\bar{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}s=0$　　$\Delta_{2P}=\int\frac{\bar{M}_2M_P}{EI}\mathrm{d}s=0$。

代入力法典型方程，可得力法基本未知量 $X_1=0$、$X_2=0$，即对称性基本未知量为零。此时，只有反对称性基本未知量 X_3。

最后内力图：

$$M = \bar{M}_3 X_3 + M_P$$
$$N = \bar{N}_3 X_3 + N_P$$
$$Q = \bar{Q}_3 X_3 + Q_P$$

弯矩图、轴力图为反对称图形，但剪力图为对称图形。

综上所述，可得如下结论：

(1)　对称结构在对称荷载作用下，对称轴截面上的反对称性内力为零；弯矩图、轴力图及位移图是对称图形，剪力图为反对称图形。

(2)　对称结构在反对称荷载作用下，对称轴截面上的对称性内力为零；剪力图为对称图形，弯矩图、轴力图及位移图为反对称性图形。

当结构承受一般荷载作用时，可利用叠加原理将荷载分解为对称性荷载与反对称性荷载，利用对称性进行计算，如图 5.19 所示。

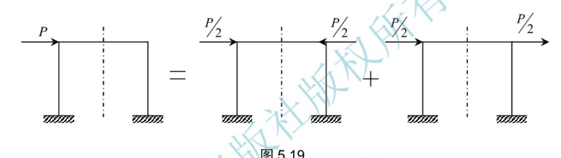


图 5.19

5.5　非荷载因素作用下的力法计算

超静定结构在非荷载因素(支座移动、温度改变、材料收缩、制造误差等)作用下，结构将产生内力，通常称之为自内力。求解自内力时仍可采用力法，但典型方程中自由项的计算有所区别。

5.5.1　支座移动时的超静定结构的力法计算

【例 5-5】　如图 5.20(a)所示的结构，已知 B 支座移动：下沉 C_B、转角 θ_B，各杆 EI=常数，试求解结构自内力。

(1) 选择力法基本未知量，如图 5.20(b)所示。

(2) 力法典型方程。

此时，变形协调条件为：基本结构沿 X_1 方向产生的位移与原结构的位移相同。而基本结构沿 X_1 方向的位移是由支座移动引起的，用 Δ_{1C} 表示。因此典型方程为：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1C} = 0$$

Δ_{1C}：由支座移动引起的基本结构沿 X_1 方向的位移，可利用单位荷载法进行计算。

(3) 计算系数及自由项。

$$\delta_{11} = \sum\int\frac{\bar{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s = \frac{4l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1C}=-\sum R_iC_i=\theta_B l-C_B$$

(4) 力法基本未知量：

$$X_1=-\frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}}=-\frac{\theta_B l-C_B}{\dfrac{4l^3}{3EI}}=\frac{3EI}{4l^3}(C_B-\theta_B l)$$

(5) 最后内力图。由于基本结构在支座移动作用下只产生变形，而无内力产生，因此，内力全部是由多余约束力引起的。

$$M=\bar{M}_1X_1$$
$$N=\bar{N}_1X_1$$
$$Q=\bar{Q}_1X_1$$

如基本体系选择为图 5.20(d)所示的结构，则力法典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1C}=\theta_A$$

力法典型方程中的右边项根据实际的变形条件可不为零。

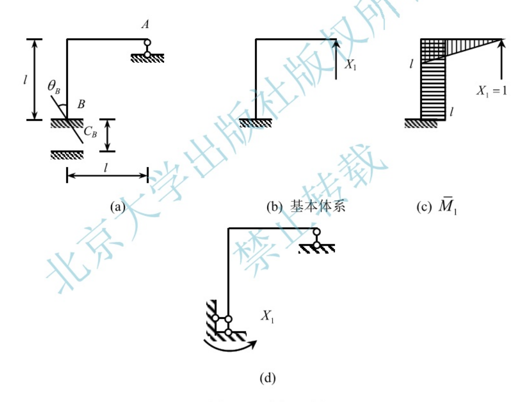


图 5.20　例 5-5 图

从上例中可以看出，由支座移动引起的超静定结构内力计算问题具有如下特点：

(1)　力法典型方程的右边项根据所选取的基本体系的不同可不为零，应根据实际位移条件确定。

(2) 力法典型方程中，自由项是由支座移动引起的。

(3) 内力与结构的刚度绝对值有关，因此在计算中必须采用刚度绝对值。

5.5.2　温度改变时的超静定结构的力法计算

温度改变时超静定结构的内力计算与支座移动时的计算相似，典型方程中自由项是由

温度改变引起的基本结构的位移，其计算公式为：

$$\Delta_{it}=\sum\int\frac{\bar{M}_i\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\bar{N}_i\alpha t_0\mathrm{d}s$$

式中，α ——材料的温度膨胀系数；

t$_0$——轴线平均温度，$t_0=\frac{(t_1+t_2)}{2}$；

Δt ——结构内外温差，$\Delta t=(t_{内}-t_{外})$。

【例 5-6】 图 5.21(a)所示刚架，EI=常数，温度膨胀系数为α，截面尺寸为300mm×600mm，原工作环境温度 20℃，当刚架内侧温度升高至 50℃时，试求结构内力。

(1) 选择力法基本未知量，如图 5.21(b)所示。

(2) 力法典型方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$$

(3) 计算系数及自由项：

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\bar{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s=\frac{1}{EI}\left(1\times12\times1+2\times\left(\frac{1}{2}\times12\times1\times\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{20}{EI}$$

$$\Delta t=50°C-20°C=30°C$$

$$t_0=\frac{(50-20)}{2}=15°C$$

$$\begin{aligned}\Delta_{it}&=\sum\int\frac{\bar{M}_i\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\bar{N}_i\alpha t_0\mathrm{d}s\\&=-\frac{\alpha\times30}{0.6}\times\left(1\times12+\frac{1}{2}\times12\times1\times2\right)+\alpha\times15\times\left(-1/12\times12\right)\\&=-1215\alpha\end{aligned}$$

温差 Δt 为正，即内侧温度较高，而 $\bar{M}_1$ 图为结构外侧受拉，因此积分取负号。

温度变化 t_0 为正，而 $\bar{N}_1$ 图中横梁受压，因此积分取负号。

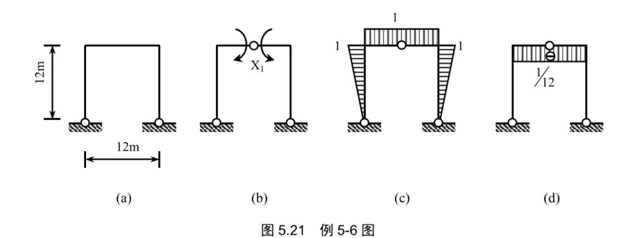


图 5.21　例 5-6 图

(4) 力法基本未知量：

$$X_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=\frac{1215\alpha}{20/EI}=60.75\alpha EI$$

(5) 作内力图

基本结构在温度变化作用下不产生内力，因此，最后内力全部是由多余约束力引起的。

$$\begin{cases}M=\bar{M}_1X_1\\N=\bar{N}_1X_1\\Q=\bar{Q}_1X_1\end{cases}$$

温度变化引起的结构自内力大小与结构刚度绝对值有关，成正比。刚度愈大，则自内力愈大。且在低温面产生拉力，高温面产生压力。因此，在钢筋混凝土结构中，应特别注意由于温度变化有可能产生的裂缝。

5.6　超静定结构的位移计算

超静定结构的位移计算仍可采用在第四章中介绍的单位荷载法，但计算较为繁琐。在力法基本原理的介绍中，我们已经知道当求出力法基本未知量——多余约束力，并将其作为主动力施加在基本体系上后，基本体系的受力和变形状态与原超静定结构完全相同。因此原超静定结构的位移计算可以转换为求基本体系这一静定结构的位移计算问题。

一般的计算步骤如下。

(1) 选择力法基本未知量，确定力法基本体系。

(2) 求解力法基本未知量及内力。

(3) 在拟求位移处施加相应的单位荷载，并作出内力图 $\bar{M}$ 、$\bar{N}$ 及 $\bar{Q}$ 。

(4) 根据位移计算公式计算位移。

$$\Delta=\sum\int\frac{M\bar{M}}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{N\bar{N}}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int k\frac{Q\bar{Q}}{GA}\mathrm{d}s$$

【例 5-7】　试求图 5.22(a)所示超静定梁的跨中挠度，EI=常数。

前例中本题的内力状态已经求解：

力法基本未知量—— $X_1=\frac{3}{8}ql$

弯矩图—— $M=\bar{M}_1X_1+M_P$

再拟求位移点 C 处施加单位荷载，并作弯矩图 $\bar{M}$ ，如图 5.22(d)所示。

位移计算公式为：　$\Delta=\int\frac{M\bar{M}}{EI}ds\quad\int\frac{\left(\bar{M}_1X_1+M_P\right)\bar{M}}{EI}\mathrm{d}s$

$\bar{M}_1$ 、M_P 如图 5.22(c)和图 5.22(d)所示，进行图乘计算：

$$\Delta=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{5l}{6}\times\frac{3}{8}ql\right)-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{8}ql^2\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{3}{8}ql^2\times\frac{l}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{32}ql^2\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{4}\right)$$

$$=-0.046\frac{ql^4}{EI}$$

结果为负值，说明位移方向与假设力方向相反，实际位移方向向下。



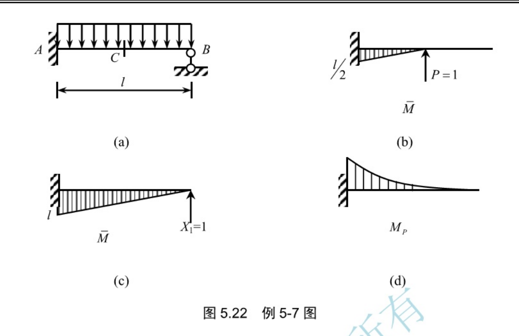


图 5.22　例 5-7 图

5.7　超静定结构最后内力图的校核

与静定结构的计算相同，超静定结构同样需进行最后内力图的校核。由于采用力法计算超静定结构时，需首先计算力法基本未知量，再由多个内力图的叠加或直接平衡条件作出最后内力图，任何一个环节有错误的话，都会导致最后内力图的错误。因此，计算完毕后，应进行校核工作。

在校核过程中，应特别注意以下几点：

(1) 基本体系的选择是否正确。

(2) 系数及自由项的值是否正确。

(3) 力法基本未知量的值是否正确。

(4) 最后内力图的校核。

最后内力图的校核要从平衡条件和变形条件两方面进行。这是由于采用力法计算过程中，力法典型方程的建立是以变形协调为基础的。某些情况下，如力法基本未知量计算错误，叠加后得到的内力图可以满足平衡条件的，但是却是错误的。

1. 平衡条件的校核

从结构内任意截取一部分，该部分的受力状态均可以满足平衡条件。通常在校核中是选取结点或某段杆件作为研究对象。

如例 5-2 中的结点 C，结点受力图如图 5.23 所示，经校验满足平衡条件。

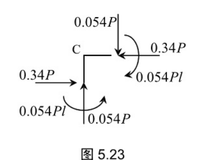


图 5.23

2. 变形条件的校核

即利用已求得的最后内力图，计算超静定结构任意点处的位移，若该点位移与超静定结构的实际位移相同，则说明满足变形条件。

通常的做法是选择实际位移已知点进行计算。如求原结构沿多余约束力方向的位移，看其是否与实际位移相同。

一般来说，对于 n 次超静定结构在采用力法计算时采用了 n 个变形协调条件，校核时也应进行 n 个多余约束力处的变形条件的校核。但实际计算中，只需进行一、两个变形条件的校核即可。

如例 5-7 中，沿多余约束力 X_1 方向的位移

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum\int\frac{\bar{M}M}{EI}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{EI}\left(\frac{3}{8}ql^2\times\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}l-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ql^2\times l\times\frac{3}{4}l\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

实际结构在该点处受链杆约束，沿竖直方向位移为零，因此，满足变形条件。

5.8* 超静定拱的计算

拱结构在土木工程中广泛应用于桥梁工程、水利工程、隧道工程、房屋建筑中的拱式屋架等。常用的拱结构一般均为超静定拱。常见的有二铰拱和无铰拱。

5.8.1 二铰拱

二铰拱为一次超静定结构(图 5.24(a))，选取力法基本体系(图 5.24(b))。力法典型方程为：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

由于基本体系为简支曲梁，所以系数及自由项的计算需采用直接积分法。列出在基本未知量及荷载作用下的任一截面的内力方程，因拱结构截面上轴力以压力为主，因此，假设压力为正。

基本未知量 $X_1=1$ 作用下，内力方程为：

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}_1&=-y\\ \bar{N}_1&=\cos\varphi\\ \bar{Q}_1&=-\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

荷载作用下，内力方程为：

$$\left.\begin{aligned}M_P&=M_P^0\\ N_P&=Q_P^0\sin\varphi\\ Q_P&=Q_P^0\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$

其中，M_P^0、Q_P^0 为与曲梁相同跨度、相同荷载作用下的简支梁的弯矩及剪力。

在一般常用的二铰拱中，当高跨比 $f/l < 1/3$ 时，计算系数 δ_{11} 可以忽略剪力的影响，而计算自由项 Δ_{1P} 时，则只需考虑弯矩的影响。

$$\delta_{11} = \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{-yM_P^0}{EI} ds$$

力法基本未知量：$X_1 = -\dfrac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \dfrac{\int \frac{-yM_P^0}{EI} ds}{\int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds}$

最后内力图由叠加法可得：

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P = M_P^0 + H_y$$

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + Q_P = Q_P^0 \cos\varphi - H \sin\varphi$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + N_P = Q_P^0 \cos\varphi + H \cos\varphi$$

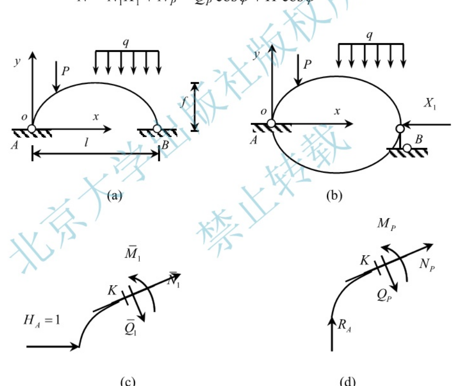


图 5.24

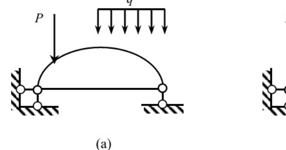
上式与在静定三铰拱中得出的内力表达式相同，说明二铰拱与三铰拱的基本受力特性是相同的，但二者之间存在根本上的区别。三铰拱的水平推力可由平衡条件直接求出，而二铰拱的水平推力是通过变形协调条件求出的。

超静定拱结构任意截面的内力与荷载、材料性质、截面几何形状以及轴线的形状有关。在设计中拱轴线的选取应尽量接近合理拱轴，以降低截面上的弯矩，提高材料的利用率。

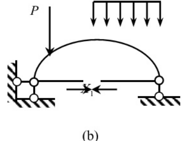
由于只有当超静定拱结构的内力计算出后，才能求出压力线，而二者之间又相互制约。因此，在设计中只能采取反复计算、逐步逼近的方法。

当基础或支座承载水平推力的条件较差时，可采用拉杆拱设计。水平推力由拉杆承担，如图 5.25(a)所示。

以多余约束拉杆的轴力为力法基本未知量，基本体系如图 5.25(b)所示。



(a)



(b)

图 5.25

则基本未知量为：

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\int \frac{-yM_P^0}{EI}\mathrm{d}s}{\int \frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s + \int \frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s + \frac{l}{E_1A_1}}$$

E_1A_1 为拉杆的抗拉刚度。当拉杆刚度趋于无穷大时，没有轴向变形，相当于刚性支座链杆，结构的受力状态与二铰拱相同。若拉杆刚度较小且趋于零，则拉杆不起水平约束作用，则结构受力状态与简支曲梁受力状态相同。

5.8.2　对称无铰拱

无铰拱为三次超静定结构。工程中常用无铰拱通常为对称结构。计算时可利用这一特性简化计算。沿对称轴处将拱顶切开，选取对称的力法基本结构，如图 5.26(b)所示。基本未知量中，X_1、X_2 为对称性内力，X_3 为反对称性内力。由对称性，力法的典型方程为：

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{aligned}\right\}$$

该方程组仍然是相互耦连的，需联立求解。再进一步设法简化计算，如可使副系数 $\delta_{12} = \delta_{21}$ 为零，则方程组可简化为 3 个独立方程，使计算简化。

假设沿拱顶处固定一段长度为 y_c 的刚臂，如图 5.26(c)所示，由于刚臂是绝对刚性的，不产生任何相对位移，因此带刚臂的无铰拱与原无铰拱是相互等效的。

取基本体系时沿对称截面将刚臂底端切开，基本未知量如图 5.26(d)所示。

此时，基本未知量作用下内力方程为：

$$\left.\begin{array}{llll} X_1 = 1: & \bar{M}_1 = y - y_c & \bar{N}_1 = -\cos\varphi & \bar{Q}_1 = -\sin\varphi \\ X_2 = 1: & \bar{M}_1 = 1 & \bar{N}_1 = 0 & \bar{Q}_1 = 0 \\ X_3 = 1: & \bar{M}_1 = -x & \bar{N}_1 = -\sin\varphi & \bar{Q}_1 = \cos\varphi \end{array}\right\}$$

副系数：$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2}{EI}\mathrm{d}s=\int\frac{1\times(y-y_c)}{EI}\mathrm{d}s$

令 $\delta_{12}=\delta_{21}$ 为零，则可得：

$$\int\frac{1\times(y-y_c)}{EI}\mathrm{d}s=0\qquad\Rightarrow\qquad y_c=\frac{\int\frac{y}{EI}\mathrm{d}s}{\int\frac{1}{EI}\mathrm{d}s}$$

由此，力法典型方程简化为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}$$

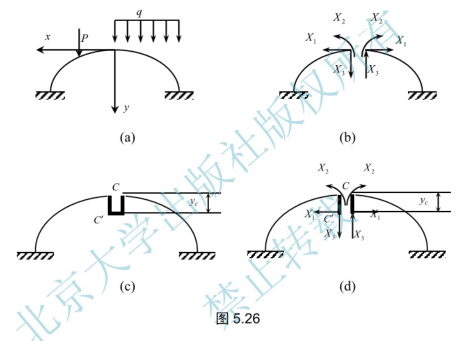


图 5.26

方程组为 3 个独立一元一次方程组成，计算工作得到大幅度简化。

以上的简化方法称为弹性中心法。刚臂的长度 y_c 称为弹性中心。沿拱轴线两侧分别取距轴 $1/2EI$ 远的两条曲线，由此曲线围成的面积称为拱的弹性面积。y_c 即为该弹性面积的形心。

5.9　超静定结构的特性

与静定结构相比，超静定结构具有如下特性：

(1)　超静定结构内有多余约束存在，这是与静定结构的根本区别。超静定结构在多余约束破坏后，结构仍然可以保持其几何不变的特性；而静定结构任一约束破坏后，便立即变成几何可变体系而失去承载能力。因此，与静定结构相比，超静定结构具有更好的抗震性能。

(2)　静定结构的内力计算只需通过平衡条件即可确定，其内力大小与结构的材料性质

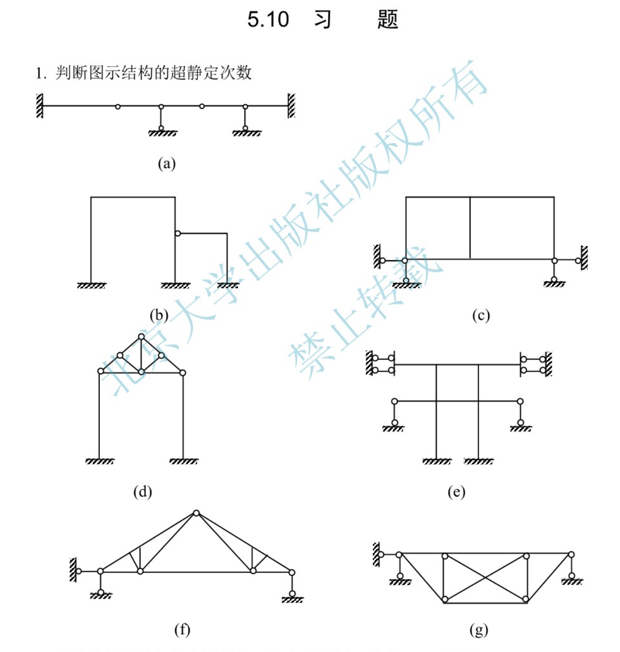
及截面尺寸无关。而超静定结构的内力计算除需考虑平衡条件外，还必须同时考虑变形协调条件，超静定结构的内力与材料的性质以及截面尺寸等有关。

(3) 静定结构在非荷载因素(支座移动、温度改变、材料收缩、制造误差等)的作用下，结构只产生变形，而不引起内力。而超静定结构在承受非荷载因素作用时，由于多余约束的存在使结构不能自由变形，在结构内部会产生自内力。在实际工程中，应特别注意由于支座移动、温度改变引起的超静定结构的内力。

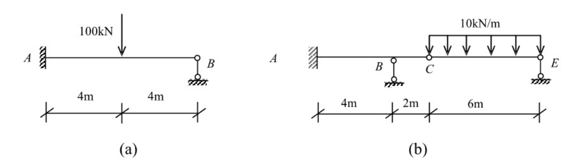
(4) 由于多余约束的存在，超静定结构的刚度一般较相应的静定结构的刚度大，因此内力和变形也较为均匀，峰值较静定结构低。

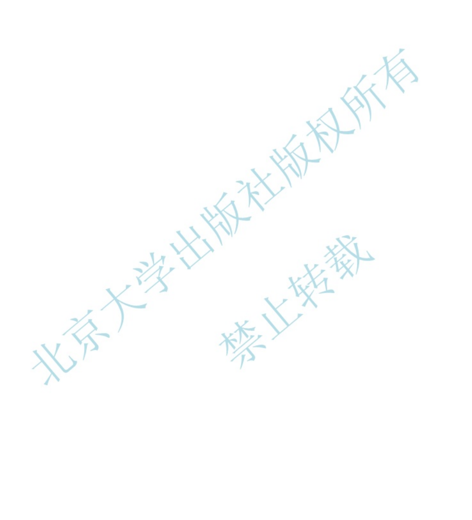
5.10 习　　题

1. 判断图示结构的超静定次数

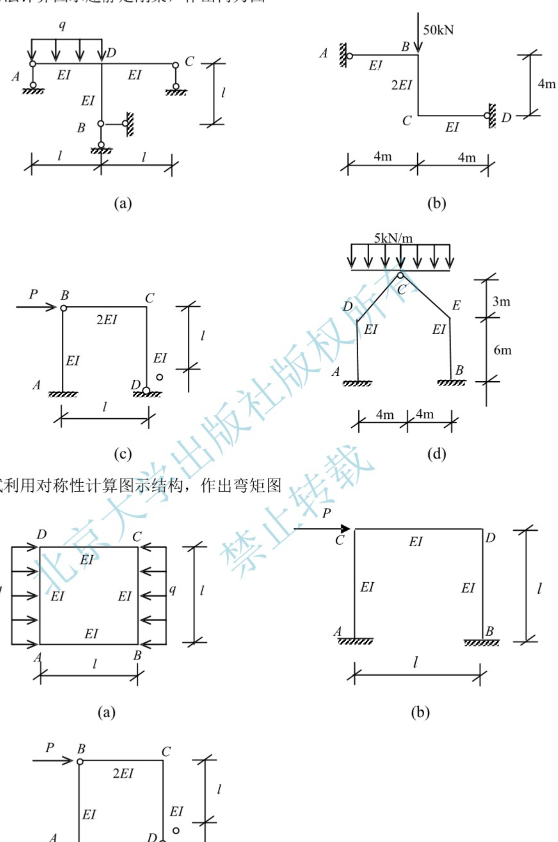


2. 力法计算图示超静定梁结构，作出弯矩图。其中：EI=常数。


100kN
A
B
4m
4m
(a)
10kN/m
A
B
C
E
4m
2m
6m
(b)



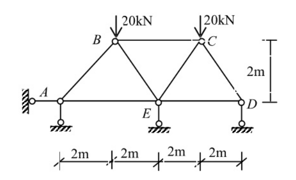
3. 力法计算图示超静定刚架，作出内力图



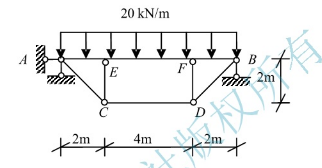
4. 试利用对称性计算图示结构，作出弯矩图

(c)

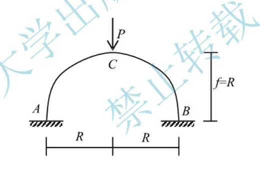
5. 力法计算图示超静定桁架，作出轴力图。其中：EA=常数。



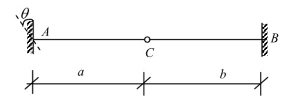
6. 力法计算图示超静定组合结构，作出弯矩图，$EA=5EI(\mathrm{m}^{-2})$。



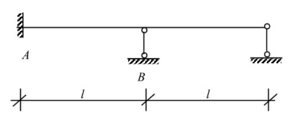
7. 试求图示等截面半圆无铰拱在图示荷载作用下拱顶及拱脚截面的弯矩。其中：EI=常数。



8. 已知：图示结构在支座 A 处有单位转角 θ=1，试作弯矩图。其中：EI=常数。

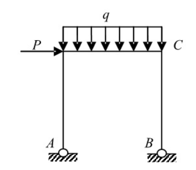


9. 图示结构在支座 C 处有向下的沉降 Δ，试作弯矩图。其中：EI=常数。



10.　圆形钢筋混凝土烟囱半径为 R，壁厚 h，EI＝常数，温度膨胀系数为 α，当内壁升温 t℃而外壁温度不变时，试求烟囱内力。

11. 试计算图示结构 C 点的水平位移。其中：EI＝常数，各杆长均为 l。





第 6 章　位　移　法

教学提示：位移法是解超静定结构的基本方法之一，许多实用的方法都是从位称法演变出来的。建立位移法方程有两种方法，一是写典型方程，二是写平衡方程。本章学习的主要内容有位移法的基本概念；超静定梁的形常数、载常数和转角位移方程；位移法基本未知量和位移法基本结构的确定；典型方程的建立；用位移法计算刚架和排架；直接用结点、截面平衡方程建立位移法方程；利用对称性简化位移法计算。

教学要求：学生要掌握位移法的基本概念，要求会利用一种方法正确的建立位移法方程，了解另一种方法。例如会正确地写出典型方程，了解利用平衡方程写出位移法方程。能正确地确定出位移法基本未知量；能熟练运用超静定梁的形常数、载常数；会用位移法计算刚架和排架；并能利用对称性对位移法计算进行简化。

6.1　位移法的基本概念

下面先看一个简例，以便具体了解位移法的基本思想。

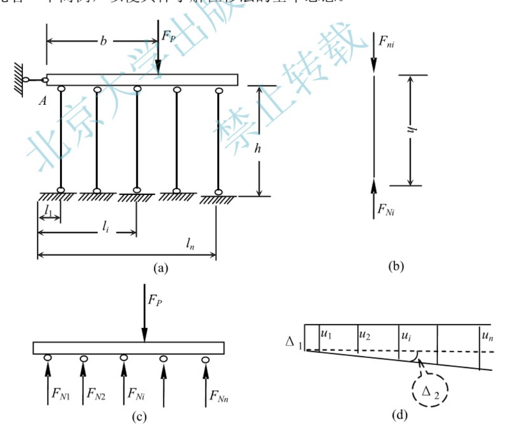


图 6.1　简例

如图 6.1(a)所示结构中，n 根相同材料、等长等截面的杆件支承着刚性横梁，横梁上承受荷载 F_p。结点 A 发生竖向位移 Δ_1 和转角位移 Δ_2。在位移法中，我们把这两个位移

Δ_1 和 Δ_2 作为基本未知量。这是因为：如果能设法把位移 Δ_1 和 Δ_2 求出，那么各杆的伸长变形即可求出，从而各杆的内力就可求出，整个问题也就迎刃而解了。由此看出，位移 Δ_1 和 Δ_2 是关键的未知量。

现在进一步讨论如何求基本未知量 Δ_1 和 Δ_2。计算分为两步。

(1) 从结构中取出一个杆件进行分析。

在体系中任取一根杆件，如图 6.1(b)所示，如已知杆件上端沿杆轴向的位移为 u_i(即杆的缩短长度)，则杆端力 F_{Ni} 应为：

$$F_{Ni} = \frac{EA}{h} u_i \tag{6-1}$$

式中 E、A、h 分别为杆件的弹性模量、截面面积和长度；系数 $\frac{EA}{h}$ 是使杆端产生单位位移时所需施加的杆端力，称为杆件的刚度系数。式(6-1)表明杆端力 F_{Ni} 与杆端位移 u_i 之间的关系，称为杆件的刚度方程。

(2) 把各杆件综合成结构。综合时各杆端的位移可用两个参数 Δ_1 和 Δ_2 描述，称为基本未知量，如图 6.1(d)所示。根据变形协调关系和小变形理论，各杆端位移 u_i 与基本位置量 Δ_1 和 Δ_2 之间的关系为：

$$u_i = \Delta_1 + l_i \Delta_2 \tag{6-2}$$

此式为变形协调条件。

考虑结构的力平衡条件：$\sum F_y = 0$，如图 6.1(c)所示，得：

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Ni} - F_P = 0 \tag{6-3}$$

再考虑以结点 A 为矩心列力矩平衡条件：$\sum M_A(F) = 0$，得：

$$\sum_{i=1}^{n} F_{Ni} l_i - F_P b = 0 \tag{6-4}$$

其中各杆的轴力 F_{Ni} 可由式(6-1)表示。

利用式(6-2)可将杆端力 F_{Ni} 用基本未知量 Δ_1 和 Δ_2 表示，代入式(6-3)和(6-4)，即得：

$$\left(n\frac{EA}{h}\right)\Delta_1 + \left(\frac{EA}{h}\sum_{i=1}^{n} l_i\right)\Delta_2 - F_P = 0 \tag{6-5}$$

$$\left(\frac{EA}{h}\sum_{i=1}^{n} l_i\right)\Delta_1 + \left(\frac{EA}{h}\sum_{i=1}^{n} l_i^2\right)\Delta_2 - F_P b = 0 \tag{6-6}$$

这就是位移法的基本方程，它表明结构的位移 Δ_1 和 Δ_2 与荷载 F_P 之间的关系。由此可求出基本未知量：

$$\Delta_1 = \frac{F_P h}{EA} \frac{b\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} l_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} l_i)^2 - n\sum_{i=1}^{5} l_i^2} \tag{6-7}$$

$$\Delta_2 = \frac{F_P h}{EA} \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i - nb}{(\sum_{i=1}^{n} l_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} l_i^2} \tag{6-8}$$

至此，完成了位移法计算中的关键一步。

基本未知量 Δ_1 和 Δ_2 求出以后，其余问题就迎刃而解了。例如，为了求各杆的轴力，可将式(6-7)和式(6-8)代入式(6-2)，再代入式(6-1)，可得

$$F_{Ni} = F_P \frac{b\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} l_i^2 + l_i \sum_{i=1}^{n} l_i - nbl_i}{(\sum_{i=1}^{n} l_i)^2 - n\sum_{i=1}^{n} l_i^2} \tag{6-9}$$

由上述简例归纳出的位移法要点如下。

(1) 位移法的基本未知量是结构的位移量 Δ_1， Δ_2。

(2) 位移法的基本方程是平衡方程。

(3) 建立方程的过程分两步。

① 把结构拆成杆件，进行杆件分拆，得出杆件的刚度方程。

② 再把杆件综合成结构，进行整体分析，得出基本方程。

此过程是一拆一搭，拆了再搭的过程。是把复杂结构的计算问题转变为简单杆件的分拆和综合的问题。这就是位移法的基本思路。

(4)　杆件分拆是结构分拆的基础，杆件的刚度方程是位移法基本方程的基础，因此位移法也称“刚度法”。

6.2　等截面直杆的转角位移方程

位移法以结点位移(包括线位移及角位移)为基本知量。其基本结构是一组超静定单跨梁，如图 6.2 所示。因为这 3 种单跨梁能用力法算出所需的各种结果，故以这 3 种单跨梁作为基本构件。为了给学习位移法打基础，在本节中讨论有关单跨超静定梁由荷载、杆端位移(包括线位移及角位移)产生的杆端力(包括杆端弯矩和杆端剪力)问题。

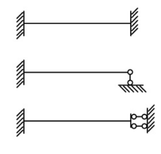


图 6.2　基本结构

6.2.1　杆端力及杆端位移的正、负号规定

现以两端固支的单跨梁为例说明，如图 6.3(a)所示。

1. 杆端弯矩

把图 6.3(a)所示单跨梁从端部截开，如图 6.3(b)所示。对 *AB* 段杆来说，杆端弯矩绕杆端顺时针转动为正，逆时针转动为负。与此对应，对结点 *A*(或 *B*)来说，绕结点逆时针转动为正，顺时针转动为负。

图 6.3(b)所示的杆端弯矩 M_{AB}、M_{BA} 均为正值；而图 6.3(c)所示的杆端弯矩均为负值。

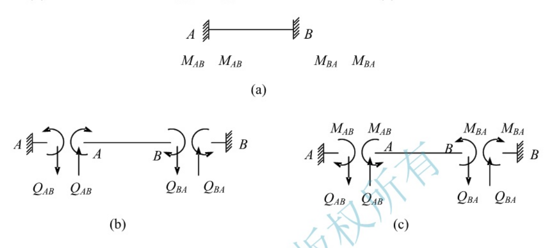


图 6.3　符号规定

2. 杆端剪力

剪力的方向定义为绕着其所作用隔离体内侧附近一点顺时针转动为正，逆时针转动为负，图 6.3(b)所示剪力 Q_{AB} 及 Q_{BA} 为正，图 6.3(c)所示的 Q_{AB} 及 Q_{BA} 则为负。

3. 支座截面转角

截面转角规定为顺时针转动为正，逆时针转动为负。图 6.4(a)所示转角 φ_A 为正(它是顺时针转动)，图 6.4b 示出的转角 φ_A 则为负(它是逆时针转动)。

4. 杆端相对线位移

杆件两端相对线位移的方向规定为使杆端联线顺时针转动为正，逆时针转动为负。图 6.5(a)所示杆端相对线位移Δ为正，而图 6.5(b)所示则为负。

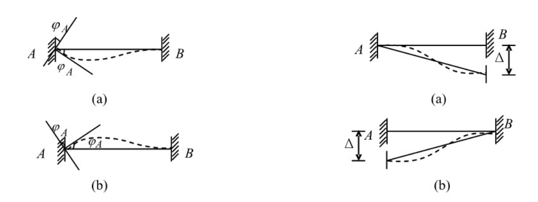


图 6.4　转角位移符号规定　　图 6.5　转角位移符号规定

应当注意本章给出的正负号规定。本章所述杆端的弯矩正、负号与材料力学中梁的弯

矩正、负号规定不同。材料力学中规定梁的下侧受拉为正。例如，图 6.3(b)中的 M_{BA} 能使梁的上侧受拉，规定为正，而材料力学中规定为负。尽管正、负号规定不同，其弯矩图都是画在杆件受拉的一侧。剪力符号规定与以前相同。

同时，还应注意作用在杆端的弯矩与作用在结点上的弯矩是作用与反作用的关系。两者大小相等、方向相反，所以作用在结点上的弯矩的正向应是逆时针方向。剪力无论作用在杆端，还是作用在结点，总是以绕着其所作用隔离体内侧附近一点是顺时针转动为正。

6.2.2　各种情况下产生的杆端力

1. 杆端单位转角产生的杆端力

1) 两端固定梁

设杆的 A 端发生正的单位转角 $\varphi_A=1$，B 端固定不动。变形曲线如图 6.6(a)所示，得到杆端弯矩如图 6.6(b)所示，产生的弯矩图如图 6.6(c)所示。这里 $i=\dfrac{EI}{l}$ 是杆件的线刚度。弯矩图是用力法算得的。

由变形曲线看出，A 端下面受拉，B 端上面受拉。(由此弯矩图左段在下方，右段在上方)。只要正确画出变形曲线草图，弯矩图就不会画反。根据弯矩图，杆件转动端旁矩为 $4i$，顺时针方向，是正的；杆件另端弯矩为 $2i$，等于转动端弯矩的一半，也是正的。由平衡条件，如图 6.6(b)所示，可得两端的杆端剪力均为 $\dfrac{6i}{l}$，都是负的。这两个杆端剪力形成一个力偶，用以平衡两端的杆端弯矩之和。

于是，由两端固定梁 AB 的 A 端发生单位转角 $\varphi_A=1$ 后产生的杆端力为

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= 4i \\
M_{BA} &= 2i \\
Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{6i}{l}
\end{aligned}
\qquad (6\text{-}10)
$$

图 6.6(c)所示的弯矩图必须牢记，有了弯矩图就容易算出杆端弯矩，有了杆端弯矩即可由平衡条件求出杆端剪力。

2) 一端固定，另端铰支梁

如图 6.7(a)所示的一端固定，另端铰支梁结构，设杆的 A 端发生正单位转角 $\varphi_A=1$，支座 B 固定不动。变形曲线如图 6.7(a)所示，杆端弯矩如图 6.7(b)所示，弯矩图如图 6.7(c)所示。由变形曲线草图可见杆件下侧受拉，弯矩图应画在杆的下方。

根据弯矩图，转动端弯矩为 $3i$，另端为 0。转动端的弯矩为顺时针，是正的。

由图 6.7(b)所示平衡条件可得两端的杆端剪力均为 $\dfrac{3i}{l}$，都是负的。

于是，一端固定、另端铰支的梁 AB，由于 A 端发生单位转角 $\varphi_A=1$ 产生的杆端力为

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= 3i \\
M_{BA} &= 0 \\
Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{3i}{l}
\end{aligned}
\qquad (6\text{-}11)
$$

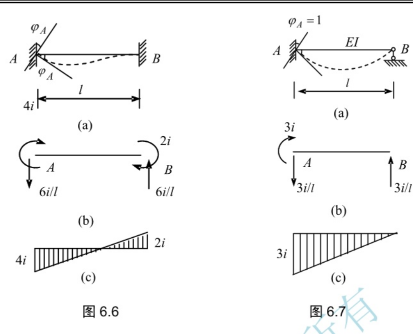


图 6.6　　图 6.7

3) 一端固定，另端为定向支座的梁

如图 6.8 所示是一端固定，另端为定向支座的梁，设杆的 A 端发生正的单位转角 $\varphi_A=1$，变形曲线草图如图 6.8(a)所示，杆端弯矩如图 6.8(b)所示，力法解出的弯矩图如图 6.8(c)所示。

根据弯矩图，转动端的杆端弯矩为 i，顺时针方向，是正的。另一端的杆端弯矩为 $-i$，逆时针方向，是负的。

杆端剪力为零。

于是，一端固定，另端为定向支座的梁，A 端发生单位转角时产生的杆端力为

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -M_{BA} = i \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = 0 \end{aligned} \tag{6-12}$$

2. 杆端单位相对线位移产生的杆端力

1) 两端固定梁

如图 6.9 所示两端固定的梁，设杆的 B 端相对于 A 端发生了正的单位线位移 $\Delta=1$，变形曲线如图 6.9(a)所示。杆端弯矩如图 6.9(b)所示，弯矩图如图 6.9(c)所示。

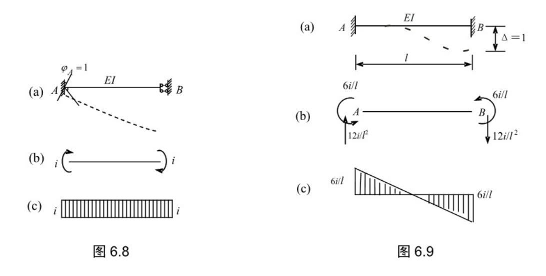


图 6.8　　图 6.9

根据弯矩图，A 端的杆端弯矩为 $\frac{6i}{l}$，逆时针方向，是负的，B 端的杆端弯矩也是 $\frac{6i}{l}$，逆时针方向，也为负。

由图 6.9(b)所示平衡条件可得两端的杆端剪力均为 $\frac{12i}{l^2}$，都是正的。

于是，两端固定梁由于发生单位相对线位移而产生的杆端力为

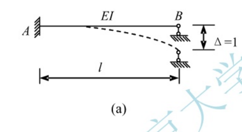
$$\begin{aligned} M_{AB} &= M_{BA} = -\frac{6i}{l} \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = \frac{12i}{l^2} \end{aligned} \tag{6-13}$$

2) 一端固定，另端铰支梁

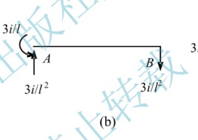
如图 6.10 所示一端固定，另端铰支的梁，设 B 端相对于 A 端发生单位线位移 $\Delta=1$，变形曲线如图 6.10(a)所示，杆端力如图 6.10(b)所示，弯矩图如图 6.10(c)所示。

一端固定，另端铰支的梁发生单位相对线位移 $\Delta=1$ 时产生的杆端力为

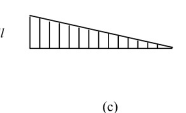
$$\begin{aligned} M_{AB} &= 3i \\ M_{BA} &= 0 \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{3i}{l^2} \end{aligned} \tag{6-14}$$



(a)



(b)



(c)

图 6.10

3) 一端固定，另端为定向支座的单跨梁

这种形状如图 6.11 所示，由于支座移动时杆件平移，所以不产生内力。

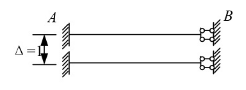


图 6.11

上述 3 种单跨梁，由于杆端转角、相对线位移引起的杆端弯矩要求记住。为便于记忆，现列表 6-1，通常称之为形常数。

表 6-1　等截面杆件位移作用下固定端弯矩和剪力(形常数)

单跨超静定梁简图	M_{AB}	M_{BA}	$Q_{AB}=Q_{BA}$
A　$\theta=1$　B	$4i$	$2i$	$\frac{-6i}{l}$
A　B　1	$\frac{-6i}{l}$	$\frac{-6i}{l}$	$\frac{12i}{l^2}$
A　$\theta=1$　B	$3i$	0	$\frac{-3i}{l}$

续表

单跨超静定梁简图	M_{AB}	M_{BA}	$Q_{AB}=Q_{BA}$
A　B　1	$\dfrac{-3i}{l}$	0	$\dfrac{3i}{l^2}$
A　$\theta=1$　B	i	$-i$	0

3. 外荷载引起的杆端力

外荷载引起的杆端弯矩称固端弯矩，为了与支座移动引起的杆端弯矩相区别，在其右上角加上一个 F，如 M_{AB}^F、M_{BA}^F，由荷载引起的杆端弯矩称固端剪力，以 Q_{AB}^F、Q_{BA}^F 来表示，如图 6.12 所示是固端弯矩及固端剪力的正向。

固端弯矩、固端剪力同样可以用力法求得。为了使用方便，把常用的固端弯矩及固端剪力列入表 6-2 中，通常称之为荷载常数。这个表上的杆端力不要求全部记住，但如图 6.13 所示几种常见情况的杆端弯矩一定要记住，考试时不给出。

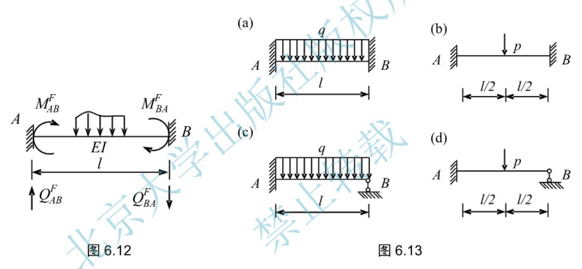


图 6.12　　图 6.13

实际上，只要记住固端弯矩，就可以利用平衡条件求出固端剪力。

如图 6.14(a)所示单跨梁，已知 A 端弯矩 $M_{AB}^F=-\dfrac{1}{8}ql^2$，则杆端剪力可按平衡条件求得。

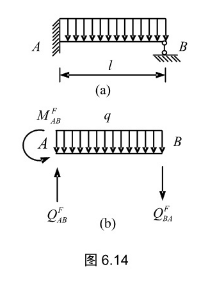


图 6.14

列力矩方程：$\sum M_A=0$

$$Q_{BA}^F\,l+\frac{1}{2}ql^2-M_{AB}^F=0$$

得

$$Q_{BA}^F=-\frac{3}{8}ql \tag{6-15}$$

列力矩方程：$\sum M_B=0$

$$Q_{AB}^F\cdot l-M_{AB}^F-\frac{1}{2}ql^2=0$$

$$Q_{AB}^F=\frac{5}{8}ql^2 \tag{6-16}$$

上面分别探讨了单跨超静定梁在单位杆端转角、单位杆端相对线位移、外荷载单独作用下的杆端力。当梁上既有外力又有杆端位移(A 端转角 φ_A，B 端转角 φ_B，A、B 两端相对线位移 Δ)时，可运用叠加原理得到杆端弯矩与杆端剪力的算式。

表 6-2　等截面杆件固定端弯矩和剪力(载常数)

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端弯矩		固端剪力	
			M_{AB}	M_{BA}	Q_{AB}	Q_{BA}
1	EI q A B l	$ql^2/12$ $ql^2/12$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
2	F_P EI A B l	$F_Pl/8$ $F_Pl/8$	$-\frac{F_Pl}{8}$	$\frac{F_Pl}{8}$	$\frac{F_P}{2}$	$-\frac{F_P}{2}$
3	M A EI B l	$M/2$ $M/4$ $M/4$ $M/2$	$\frac{M}{4}$	$\frac{M}{4}$	$-\frac{3M}{2l}$	$-\frac{3M}{2l}$
4	t_1 EI t_2 h b l $\Delta t = t_1 - t_2$	$\alpha EI\Delta t/h$	$-\frac{\alpha EI\Delta t}{h}$	$\frac{\alpha EI\Delta t}{h}$	0	0
5	q A EI B l	$ql^2/8$	$-\frac{ql^2}{8}$	0	$-\frac{5ql}{8}$	$\frac{3ql}{8}$
6	F_P A EI B $l/2$ $l/2$	$3F_Pl/16$	$-\frac{3F_Pl}{16}$	0	$\frac{11F_P}{16}$	$-\frac{5F_P}{16}$
7	A EI B M l	M $M/2$	$\frac{M}{2}$	M	$-\frac{3M}{2l}$	$-\frac{3M}{2l}$
8	t_1 EI t_2 h b l $\Delta t = t_1 - t_2$	$3EI\alpha\Delta t/2h$	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
9	q A EI B l	$ql^2/3$ $ql^2/6$	$-\frac{ql^2}{3}$	$-\frac{ql^2}{6}$	ql	0
10	F_P EI A B l	$F_Pl/2$ $F_Pl/2$	$-\frac{F_Pl}{2}$	$-\frac{F_Pl}{2}$	F_P	F_P
11	t_1 EI t_2 h b l $\Delta t = t_1 - t_2$	$EI\alpha\Delta t/h$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0

6.2.3　等截面直杆的转角位移方程

单跨超静定梁在荷载、温改和支座移动共同作用下，如图 6.15 所示，在线性小变形条件下，利用前两小节讨论的结果，由叠加原理可得转角位移方程(刚度方程)：

$$\begin{cases} M_{AB} = 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - \dfrac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{AB}^F \\ M_{BA} = 4i\varphi_B + 2i\varphi_A - \dfrac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{BA}^F \\ Q_{AB} = -\dfrac{6i}{l}\varphi_A - \dfrac{6i}{l}\varphi_B + \dfrac{12i}{l^2}\Delta_{AB} + Q_{AB}^F \\ Q_{BA} = -\dfrac{6i}{l}\varphi_A - \dfrac{6i}{l}\varphi_B + \dfrac{12i}{l^2}\Delta_{AB} + Q_{BA}^F \end{cases} \tag{6-17}$$

已知杆端弯矩，可由杆件的矩平衡方程求出剪力：

$$Q_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} + Q_{AB}^0 \tag{6-18}$$

其中：i 是杆件的线刚度；M_{AB}^F, M_{BA}^F 为由荷载和温度变化引起的杆端弯矩，称为固端弯矩。

另两类杆的转角位移方程可按同样的道理推出。

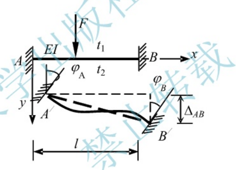


图 6.15　单跨超静定梁在荷载、温改和支座移动共同作用

6.3　基本未知量数目的确定和基本结构

位移法是计算超静定结构的基本方法之一。

在本章的讨论中，刚架与梁不计轴向变形，且变形微小，因而可以认为结构变形后杆件两端的间距不变，或者简单地说杆不变。由此，两结点间有杆相联时，二结点的线位移便互相关联，而不会全是独立的了。

基本未知量指独立的结点位移：包括角位移和线位移，如图 6.16 所示的结构为 9 次超静定结构，用力法计算有 9 个基本未知量。而采用位移法计算，则只有一个基本未知量。

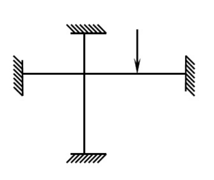


图 6.16

基本结构指增加附加约束后，使得原结构的结点不能发生位移的结构。

1. 无侧移结构

无侧移结构中的基本未知量为所有刚结点的转角。基本结构为在所有刚结点上加刚臂后的结构。这样，只需在结构的刚结点上和组合结点的刚结处加刚臂，即可变成基本结构。

如图 6.17 所示结构，在结构的刚结点和组合结点上都要加刚臂，铰结结点处不要加。结点 3(图 6.17(a))是刚结点，在结点 3 上加刚臂后(图 6.17(b))，杆 23 变为一端固定一端铰支杆，杆 3*D* 变为两端固定杆；结点 2 是铰结点，不加刚臂也构成了单跨梁(图 6.17(b))，杆 23 为一端铰支一端固定梁，杆 2*C* 为一端铰支一端固定梁，杆 21 为两端铰支梁，所以铰结点无需加刚臂；结点 1 是组合结点。需要在杆 1*A* 与杆 1*B* 的刚性接头处加刚臂，以使此二杆变为两端固定梁(图 6.17(b))。注意：结点 1 上的附加刚臂只约束刚结于结点 1 的杆 *A*1 和杆 *B*1 的 1 端转角，而不约束铰结于结点1 的杆 12 的 1 端转角。附加约束所约束的位移就是基本未知量，对于本例，结点1 及结点 3 的转角 Z_1、Z_2 即为基本未知量，如图 6.17(c)所示。

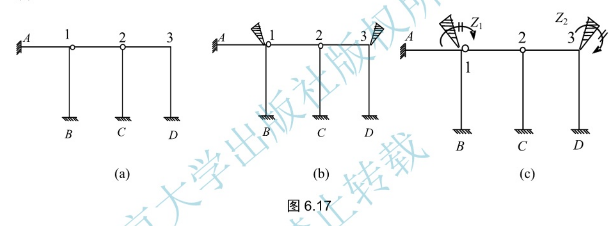


图 6.17

2. 有侧移结构

基本未知量除所有刚结点的转角外，还有结点的线位移。基本结构除在所有刚结点上加刚臂外，还要附加支杆以限制侧向移动。这样，结构在刚结点、组合结点的刚结处加刚臂，还要加有限制侧向移动的支杆，即构成基本结构。

为了确定独立的结点线位移的数目，可采用铰化结点的办法，即在全部刚结点上加铰，使其变成铰接结点，在所有固定端上加铰，使其变成铰支座，然后对这个铰结体系作机构分析。如果铰结体系是几何不变的，则原结构没有结点线位移。如果铰结体系是几何可变的，则原结构就有结点线位移。结点线位移的数目怎样确定呢？用加支杆的办法使这个铰结体系变成几何不变体系，所需加的支杆的数目就等于独立的结点线位移数目，以下简称为结点线位移数目。把如图

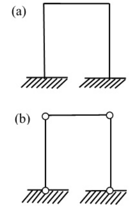


图 6.18

6.18(a)所示的结构变成如图 6.18(b)所示的结构，图 6.18(b)为一次机构，则图 6.18(a)有一

个结点线位移。又例如，图 6.19(a)为有侧移的刚架，为了确定其结点线位移数目，首先在所有刚结点(包括支座)上加铰，使其变为铰结体系(图 6.19(b))，显然这是个几何可变体系，为使其成为几何不变，需加 3 个支杆。这 3 个支杆可加在结点 2、5、7 上(图 6.19(c))，按几何组成分析规则——逐次加两杆结点，可以认定其为几何不变体系，附加支杆也可以加在结点 1、3、6 上。

由于需加支杆的数目为 3，说明体系的结点线位移数目等于 3，之所以能用铰结体系来判断原结构的位移个数，是因为两种体系结点间的几何约束是一样的，都认为杆件长度不变，亦即结点间距不变，而有几个独立线位移正是由这些结点间的约束条件确定的。

若结构简单，线位移个数容易判断，则无需画出铰化体系。

该体系不仅有 3 个结点线位移；还有 7 个结点角位移，基本未知量的总数目为 10 个。欲使其形成基本结构，应当加上 7 个附加刚臂，3 个附加支杆，基本结构如图 6.19(d)所示。

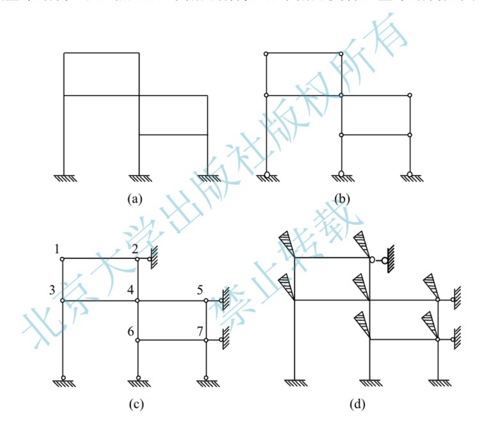


图 6.19　基本结构体系的形成

综上所述，有了位移法基本结构也就有了位移法基本未知量。为了形成基本结构，需在刚结点和组合结点加刚臂以限制结点转动。同时可以借助于铰化体系，加附加支杆以限制结点移动。附加刚臂和附加支杆的总数，即是基本未知量数。

角位移未知量数目等于附加刚臂数目。线位移未知量数目等于附加支杆数目。

位移法基本未知量数目与结构的超静定次数无关，它们是完全不同的两个概念。

6.4　位移法典型方程及刚架计算

6.4.1　位移法典型方程

位移法典型方程的建立与力法一样，首先确定待分析问题有未知量个数，如几个独立结点位移，几个独立的线位解法，如图 6.20 所示结构基本未知量只有一个，即结点 B 的转角位移。然后加限制结点位移的相应约束,如线位移加链杆、角位移加限制转动的刚臂来建立位移法基本结构。图 6.20(a)的基本结构如图 6.21(a)所示。基本结构可以拆成单跨梁的 3 类超静定结构，如图 6.2 所示。和力法一样，受基本未知量和外因共同作用的基本结构称为基本体系。

然后令基本结构分别产生单一的单位基本位移 $Z_1=1$，根据形常数可作出基本结构单位内力图(单位弯矩图 $\bar{M}_1$)。根据载常数可作出基本结构荷载(包括广义荷载)内力图(弯矩图 M_P)。图 6.20(a)所示结构的两个弯矩图，如图 6.21(b)、图 6.21(c)所示。图中 i_{AB} 和 i_{BC} 分别为 $\dfrac{EI}{l}$ 和 $\dfrac{EI}{h}$，称为 AB 和 BC 杆的线刚度。习惯上将单位长度的抗弯刚度记作 $i=\dfrac{EI}{l}$，为了标明是哪根杆的线刚度，再以双下标表明杆的名称，如 i_{AB} 和 i_{BC} 等。根据单位内力图，取结点或部分隔离体可计算出 $Z_j=1$ 时所引起的位移 $Z_i=0$ 时所对应的附加约束上的反力系数 k_{ij}；根据荷载内力图，取结点或部分隔离体可计算 Z_i 位移对应的附加约束上的反力 F_{iP}(与位移方向相同为正)。对于图 6.20(a)所示结构而言：$k_{11}=4i_{AB}+3i_{BC}$，$F_{1P}=-M_{BA}^{P}=-\dfrac{F_P l}{8}$。

(a)　(b)

图 6.20

(a)　(b)　(c)

图 6.21

基本结构和原结构有两点区别：原结构在外因下是有结点位移的，而基本结构是无结点位移的；基本结构有附加的约束，而原结构是无附加约束的。基本体系是令基本结构发生原结构待求的位移 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$，同时受有外因作用，从结点位移方面看，基本体系和原结构没有差别，但是由于待求位移 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和外因作用，第 i 个附加约束上将产生 $F_i=\sum_{i=1}^{n}k_{ij}Z_j+F_{iP}$ 的约束总反力，显然这是和原结构不同的。为了消除这一差别，由于原结构没有附加约束，所以第 i 个附加约束上的总反力应该等于 0，也即 $F_i=0$ 或

$$\sum_{i=1}^{n}k_{ij}Z_j+F_{iP}=0\ ,(i=1,2,\cdots n) \tag{6-19}$$

或

$$\left.\begin{aligned}k_{11}Z_1+k_{12}Z_2+\cdots+k_{1n}Z_n+F_{1P}=0\\k_{21}Z_1+k_{22}Z_2+\cdots+k_{2n}Z_n+F_{2P}=0\\\vdots\\k_{n1}Z_1+k_{n2}Z_2+\cdots+k_{nn}Z_n+F_{nP}=0\end{aligned}\right\}\tag{6-20}$$

式(6-19)和式(6-20)称为位移法典型方程。对于图 6.20(a)所示结构，位移典型方程为

$$k_{11}Z_1+F_{1P}=0$$

其中：$k_{11}=4i_{AB}+3i_{BC}$，$F_{1P}=-M_{BA}^{P}=-\dfrac{F_Pl}{8}$。

位移法典型方程和力法对线弹性结构来说是相同的，它是线性代数方程组，求解后即可得基本未知量 $Z_i\,(i=1,\ 2\ ,\cdots\ \ n)$，求得位移基本未知量以后，由 $M=\sum\bar{M}_iZ_i+M_P$ 进行叠加，得到基本体系的弯矩，也就是原结构的弯矩，进而可求超静定结构的其他内力和任意位移等。

可见，位移法采用基本体系的解题法题与力法的思路是十分相像的。

图 6.22(a)所示刚架既有结点转角，又有结点线位移。在给定荷载作用下变形曲线大致形状如虚线所示。结点 1 及结点 2 的角位移用 Z_1、Z_2 表示，结点 3 的侧向线位移用 Z_3 表示。该体系的基本未知量有三个。为了把它转化为单跨梁系，在结点 1、2 两处加附加刚臂，以限制结点转动，在结点 3 处加附加支杆，以限制刚架侧向移动，形成的位移法基本结构如图 6.22(b)所示。

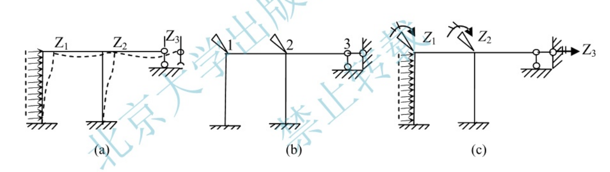


图 6.22

在基本结构上，先加上已给定的外荷载，为了消除基本结构与原结构之间的差别，转动附加刚臂，使结点 1、2 分别发生转角 Z_1、Z_2，移动附加支杆 3，使结点 3 发生的水平侧移等于 Z_3，如图 6.22(c)所示。如果 Z_1、Z_2、Z_3 是应有的位移，则该体系就恢复了其原来的自然状态，而附加约束就不起作用，即其反力等于零。

$$\left.\begin{aligned}F_1=0\\F_2=0\\F_3=0\end{aligned}\right\}\tag{6-21}$$

由于附加约束 1、2 是刚臂，反力 F_1、F_2 为刚臂 1、2 的反力矩。附加约束 3 是支杆，其反力为支杆反力。

公式(6-21)中，反力 F_1、F_2、F_3 是由转角位移 Z_1、Z_2、线位移 Z_3 和外荷载对基本结构共同作用引起的。按叠加原理，共同作用等于分别作用的叠加。由此

$$\left.\begin{aligned} F_1 = F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{1P} \\ F_2 = F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{2P} \\ F_3 = F_{31} + F_{32} + F_{33} + F_{3P} \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

其中 F_{11}、F_{21}、　F_{31} 为由 Z_1 引起的附加约束 1、2、3 的反力；F_{12}、F_{22}、F_{32} 为由 Z_2 引起的附加约束 1、2、3 的反力；F_{13}、F_{23}、F_{33} 为由 Z_3 引起的附加约束 1、2、3 的反力；F_{1P}、F_{2P}、F_{3P} 为由外荷载引起的附加约束 1、2、3 的反力。下标中的头一字母指示是哪个约束的反力，第二个字母指示是由什么原因引起的。

为了把未知量 Z_1、Z_2、Z_3 显露出来，把它们引起的反力写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} F_{11} = k_{11}Z_1 \\ F_{12} = k_{12}Z_2 \\ F_{13} = k_{13}Z_3 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} F_{21} = k_{21}Z_1 \\ F_{22} = k_{22}Z_2 \\ F_{23} = k_{23}Z_3 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} F_{31} = k_{31}Z_1 \\ F_{32} = k_{32}Z_2 \\ F_{33} = k_{33}Z_3 \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

其中 k_{11}、k_{21}、k_{31} 为 Z_1=1(图 6.23a)引起的附加约束 1、2、3 的反力；k_{12}、k_{22}、k_{32} 为 Z_2=1(图 6.23b)引起的附加约束 1、2、3 的反力；k_{13}、k_{23}、k_{33} 为 Z_3=1(图 6.23c)引起的附加约束 1、2、3 的反力；图中所示为反力正向。

将式(6-23)代入式(6-22)得：

$$\left.\begin{aligned} k_{11}Z_1 + k_{12}Z_2 + k_{13}Z_3 + F_{1P} = 0 \\ k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + k_{23}Z_3 + F_{2P} = 0 \\ k_{31}Z_1 + k_{32}Z_2 + k_{33}Z_3 + F_{3P} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

上式所示方程组就是式(6-19)和式(6-20)关于 3 个未知量的位移法典型方程。方程式的数目永远与基本未知量数目相同。因为有多少个未知位移就要加多少个约束，而加多少个附加约束，就要有多少个使附加约束反力等于 0 的方程，以使结构恢复自然状态。

典型方程式中的系数 k_{ij} 是位移 Z_j=1 时引起的附加约束 i 的反力。

第一个方程表示附加约束 1 的反力等于 0，即 F_1=0。第一个附加约束是刚臂，其反力 F_1 为反力矩。第一个方程中的所有系数 k_{11}、k_{12}、k_{13} 和自由项 F_{1P} 都是附加刚臂 1 的反力矩，所以下标中第一个字母都是 1。

第二个方程表示附加约束 2 的反力等于 0，即 F_2=0。第二个附加约束也是刚臂，故其反力 F_2 也为反力矩。第二个方程中的所有系数 k_{21}、k_{22}、k_{23} 和自由项 F_{2P} 都是附加刚臂 2 的反力矩，所以第一个下标都是 2。

第三个方程表示附加约束 3 的反力等于 0，即 F_3=0。第三个方程中所有系数 k_{31}、k_{32}、k_{33} 和自由项 F_{3P} 都是附加支杆 3 的反力，所以第一个下标都是 3。

为了求系数和自由项，可以绘出 Z_1、Z_2、Z_3 引起的单位弯矩图 M_1、M_2、M_3 及荷载弯矩图 M_P 图，如图 6.23(a)、图 6.23(b)、图 6.23(c)所示。

根据图 6.23 所示的单位内力图(弯矩图)和荷载内力图(弯矩图)，取结点或部分隔离体可计算出 $Z_j = 1$ 时所引起的 Z_i 位移对应的附加约束上的反力系数 k_{ij}；取结点或部分隔离体可计算 Z_i=0 时所对应的荷载产生的附加约束上的反力 F_{iP} (与位移方向相同为正)。

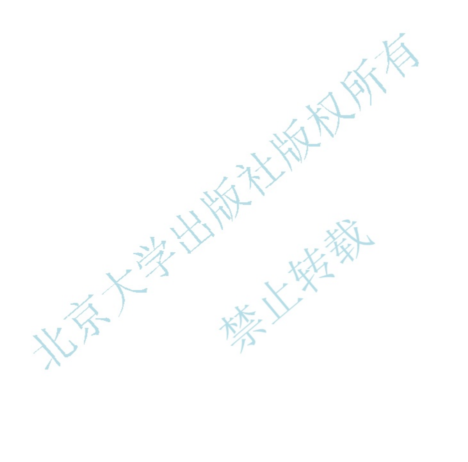
在 $Z_1 = 1$，$Z_2 = 0$，$Z_3 = 0$ 时，如图 6.23(a)所示，取结点 *1* 为研究对象，如图 6.24 所示，由 $\sum M_1 = 0$，有

$$k_{11} - 4i_{1A} - 4i_{12} = 0$$

$$k_{11} = 4i_{1A} + 4i_{12}$$

取结点 1 为研究对象，同理，有

$$k_{21} = 2i_{12}$$



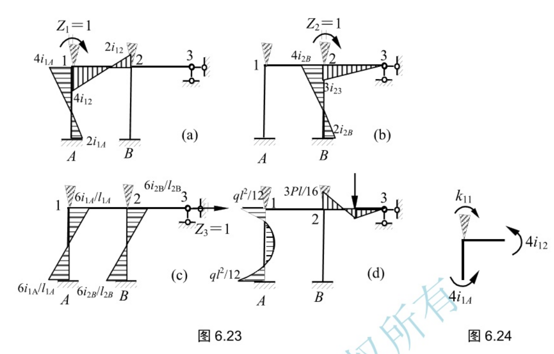


图 6.23　　　　图 6.24

取结构上部梁 123 为研究对象，如图 6.25 所示，由 $\sum X=0$，有

$$k_{31}-Q_{1A}-Q_{2B}=0$$

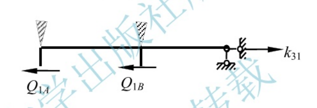


图 6.25

Q_{1A}、Q_{2B} 分别代表杆 1A 和杆 2B 上的杆端剪力。因为杆 1A 上的剪力为 $Q_{1A}=-\dfrac{6i_{1A}}{l_{1A}}$；杆 2B 上无弯矩，也无剪力，$Q_{12}=0$，所以有

$$k_{31}=-\frac{6i_{1A}}{l_{1A}}$$

对于 $Z_1=0$，$Z_2=1$，$Z_3=0$ 的情况，如图 6.23(b)所示和 $Z_1=0$，$Z_2=1$，$Z_3=0$ 的情况，如图 6.23(c)所示，各系数可仿上述图 6.23(a)所示情形的做法，得：$k_{12}=2i_{12}$，$k_{22}=4i_{12}+4i_{2\mathrm{B}}+3i_{23}$，$k_{32}=-\dfrac{6i_{2B}}{l_{2B}}$ ；$k_{13}=-\dfrac{6i_{1A}}{l_{1A}}$，$k_{23}=-\dfrac{6i_{2B}}{l_{2B}}$，$k_{33}=\dfrac{12i_{1A}}{l_{1A}^2}+\dfrac{12i_{2B}}{l_{2B}^2}$。

对于在荷载 q 和 P 作用下的情形，取 $Z_1=0$，$Z_2=0$，$Z_3=0$，同样仿图 6.23(a)所示情形的做法，得常数项：$F_{1P}=-\dfrac{1}{12}ql_{1A}^2$，$F_{2P}=-\dfrac{3}{16}Pl_{13}$，$F_{3P}=-\dfrac{1}{2}ql_{1A}$。

从上面的讨论分析中可以看出：

(1) 主系数永远是正的，副系数及荷载项可正、可负、或者为零。主系数为正值的理由结合 k_{11} 具体说明如下：k_{11} 是使结点 1 发生单位转角所需由刚臂 1 施加给结点 1 的力矩，这个力矩当然与转角 Z_1 方向相同而不相反，当需要求发生顺时针的转角时，所需施加的

力矩必须是顺时针的，所以是正的。

(2) 由所求系数可见，副系数互等，如$k_{12}=k_{21}=2i_{12}$，$r_{13}=r_{31}=-\dfrac{6i_{1A}}{l_{1A}}$，$r_{23}=r_{32}=-\dfrac{6i_{1B}}{l_{1B}}$。再次说明了反力互等定理的正确性，这个关系可用来作结果校核。

(3) 在主、副系数中，不包含与外荷载有关的因素，所以它不随着荷载的改变而改变，只取决于结构本身，常数项则随外外荷载而改变。因此，当结构不变而荷载改变时，只需重新计算常数项，而不需重新计算主、副系数。

通常把只有结点角位移的刚架叫无侧移刚架，把有结点线位移或既有结点角位移又有结点线位移的刚架叫有侧移刚架。下面通过例题分别讨论。

6.4.2　无侧移刚架的计算

用位移法解算无侧移刚架时，其基本未知量只有结点转角。

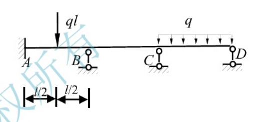


图 6.26

【例 6-1】 用位移法作如图 6.26 所示结构的 M 图，各杆 EI、l 相同，q=26kN/m，l=6m。

解：本例有两个刚结点,故结点角位移有两个：φ_B，φ_C，用 Z_1，Z_2 表示。分别在结点 1、2 处加附加刚臂，得位移法基本结构并为基本未知量建立位移法方程。

$$k_{11}Z_1+k_{12}Z_2+F_{1P}=0$$
$$k_{21}Z_1+k_{22}Z_2+F_{2P}=0$$

设 EI/l=1，有 $k_{11}=8$，$k_{12}=k_{21}=2$，$k_{22}=7$，$F_{1P}=117\text{kN}\cdot\text{m}$，$F_{2P}=-117\text{kN}\cdot\text{m}$，则

$$8Z_1+2Z_2+117=0$$
$$2Z_1+7Z_2-117=0$$

解方程：$Z_1=-20.25$，$Z_2=22.5$。

作 M 图

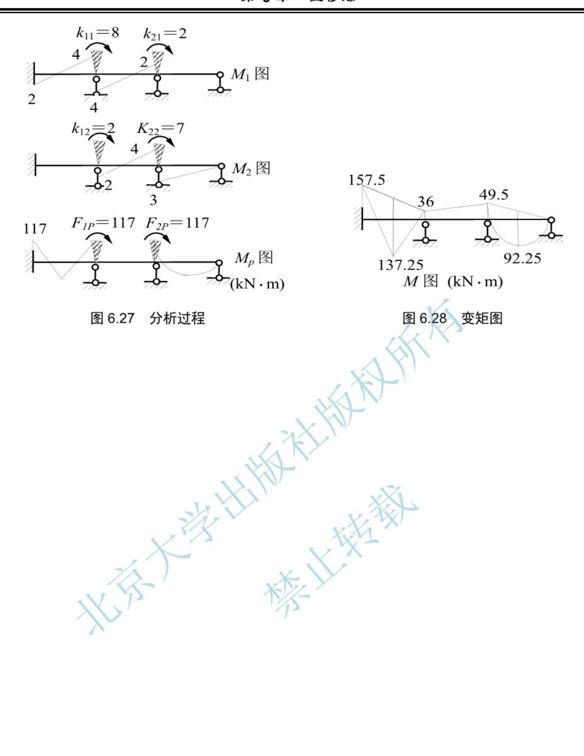


图 6.27　分析过程

图 6.28　变矩图

【例 6-2】 计算如图 6.29(a)所示刚架，并绘 M、Q、N 图。

解：(1) 确定基本未知量，画出基本结构。

本例有两个刚结点，故结点角位移有两个，用 Z_1、Z_2 表示。虽然看得出结点 2 转角是逆时针的，为了方便，也假定是顺时针的。分别在结点 1、2 处加附加刚臂，得位移法基本结构。

(2) 列位移法典型方程，附加刚臂的反力矩等于零，即：

$$k_{11}Z_1 + k_{11}Z_2 + F_{1P} = 0$$

$$k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + F_{2P} = 0$$

(3) 求系数项和常数项。绘单位弯矩图 M_1、M_2 及荷载弯矩图 M_{P}，如图 6.29(b)、(c)及(d)所示。

考虑到 $i_{1A} = \dfrac{3EI}{4}$，$i_{12} = \dfrac{5EI}{5} = EI$　$i_{2B} = \dfrac{3EI}{6} = 0.5EI$　$i_{2C} = \dfrac{4EI}{4} = EI$，计算系数及荷载项。它们都是附加刚臂的反力矩，由相应弯矩图直接读出(可截取结点，用 $\sum X = 0$ 验算)。

k_{11} 为 Z_1=1 引起刚臂 1 的反力矩，由 M_1 图的结点 1 处读出：

$$k_{11} = 3EI + 4EI = 7EI$$

k_{12} 为 Z_2=1 引起的刚臂 1 的反力矩，由 M_2 图结点 1 处读出：

$$k_{12} = 2EI$$

F_{1P} 为荷载引起的刚臂 1 的反力矩，由 M_P 图结点 1 处读出：

$F_{1P} = -\dfrac{1}{12}ql^2$　　(杆端力矩 M_{12} 反时针方向，故为负)

k_{21}、k_{22}、F_{2P} 分别由 M_1、M_2、M_P 图的结点 2 处读出：

$$k_{21} = 2EI = k_{12}$$

$$k_{22} = 4EI + 2EI + 3EI = 9EI$$

$$F_{2P} = \frac{1}{12}ql^2$$

(4) 将全部系数、荷载项代入典型方程，解出 Z_1、Z_2。由：

$$7EIZ_1 + 2EIZ_2 - \frac{1}{12}ql^2 = 0$$

$$2EIZ_1 + 9EIZ_2 + \frac{1}{12}ql^2 = 0$$

解得

$$Z_1 = \frac{9.32}{EI}$$

$$Z_2 = -\frac{7.63}{EI}$$

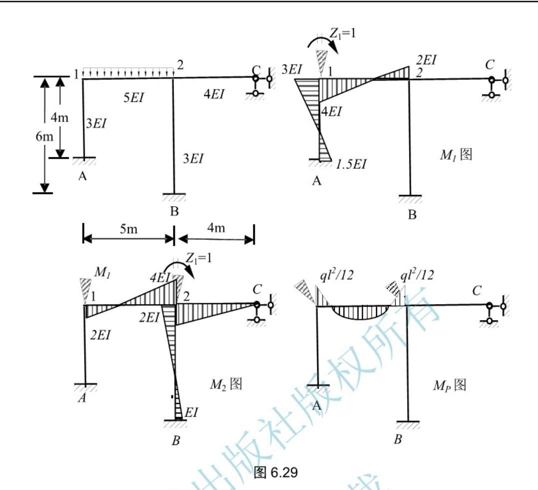


图 6.29

(5) 用叠加法绘 M 图。　　$M = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_P$

最终弯矩图如图 6.30(a)所示。

顺便指出，校核结点是否平衡时，有时会出现所有杆端力矩总和不等于 0，而等于一个微小数值的情形，这是计算误差所致，通常是允许的。也可以稍作调正，使其满足结点平衡条件 $\sum M = 0$ 。例如本题的结点 2 就是如此，如图 6.30(b)所示。

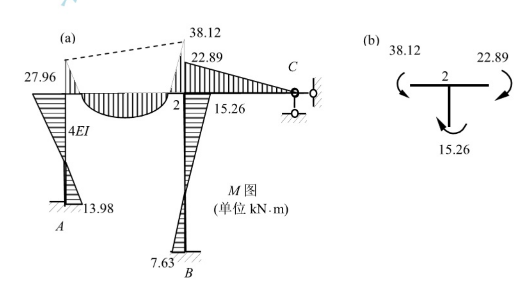


图 6.30

(6) 根据弯矩图，绘 Q 图。

有了弯矩图，可绘出剪力图。本例题以杆件 12 为例再次说明杆端剪力的计算方法。把杆件 12 取出，如图 6.31(a)所示。该杆承受的已知力有：均布荷载 q、杆端力矩 M_{12}(27.96)、杆端力矩 M_{21}(38.12)，M_{12} 为正值。

方程 $\sum M_1(X)=0$

$$Q_{12}\times 5+38.12+\frac{1}{2}\times 24\times 5^2-27.96=0$$

得：

$$Q_{21}=-62.03\text{kN}$$

再列方程 $\sum M_2(X)=0$

$$Q_{12}\times 5+38.12-27.96-\frac{1}{2}\times 24\times 5^2=0$$

得：

$$Q_{12}=57.97\text{kN}$$

其余各杆杆端剪力计算从略，剪力图如图 6.31(b)所示。

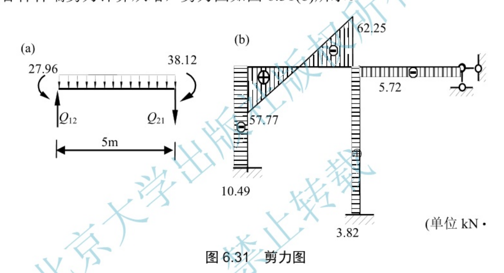


图 6.31　剪力图

(7) 根据剪力图绘轴力图。

截取结点 1，如图 6.32(a)所示，把杆端剪力视为已知力按真实方向画出。由投影方程 $\sum X=0$、$\sum Y=0$ 得轴力 N_{12}＝−10.49 及 N_{1A}＝−57.77。再截取结点 2，如图 6.32(b)所示，由投影方程得出 N_{21}＝−10.49、N_{2C}＝−6.67、N_{2B}＝69.97，它们的值如图 6.32(c)所示。

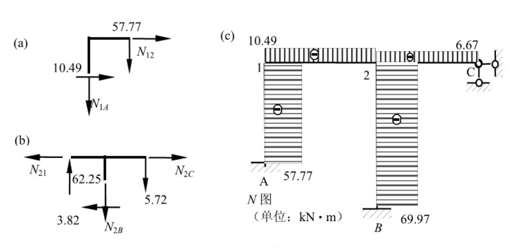


图 6.32　轴力图

从计算结果可知，图 6.29(a)所示刚架结点 1 的转角 N_1 为正值，这意味着结点 1 顺时针转动了一个角度 Z_1。N_2 为负值，说明结点 2 逆时针转动了一个角度 Z_2。

6.4.3　有侧移刚架的计算

有侧移刚架的位移法的基本未知量包括结点角位移和结点线位移。首先看一个只有线位移的例子，再讲包括结点角位移和结点线位移的例子。

【例6-3】　作如图6.33(a)所示带有无限刚度梁的刚架的弯矩图。

解：(1)　确定基本体系。当刚架受到荷载作用时，由于有无限刚梁的存在，梁 CD 不会产生弯曲变形，仅会发生刚体移动。整个刚架的变形曲线如图 6.33(a)所示。在形成基本体系时，因为结点 C、D 不会转动，只须在结点 D 处加水平支杆就可以了。无限刚梁对柱子的约束作用相当于在结点加了角变约束。

(2) 列位移法典型方程，附加支杆的反力等于零，即：

$$k_{11}Z_1 + F_{1P} = 0$$

(3)　求系数和自由项。绘荷载弯矩图和单位位移弯矩图，令$i = EI/h$，由表 6-1 和表 6-2 查出 AC 杆的固端弯矩，作出M_P 图，如图 6.33(b)所示；令 Z_1=1 作出 M_1 图，如图 6.34(c)所示。

k_{11} 取 M_1 图中 CD 梁为分离体，求得

$$k_{11} = 2\times\frac{12i}{h^2} = \frac{24i}{h^2}$$

F_{1P}为位移荷载引起的刚臂 1 的反力矩，由 MP 图中 CD 梁为分离体求得：

$$F_{1p} = -\frac{1}{2}qh$$

(4) 将系数、常数项代入典型方程，解出 Z_1。由：

$$\frac{24i}{h^2}Z_1 - \frac{1}{2}ql = 0$$

解得：

$$Z_1 = \frac{qh^3}{48i}$$

(5) 用叠加法绘 M 图。由 $M = M_1Z_1 + M_P$，作结构弯矩图，如图 6.33(d)所示。

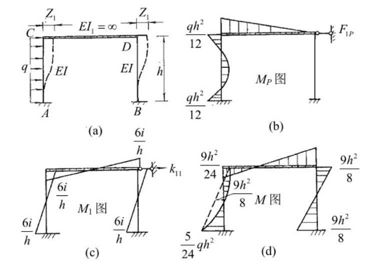
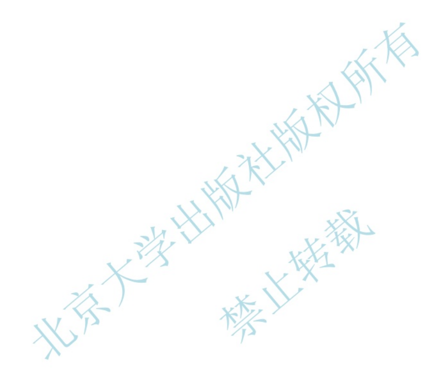


图 6.33



【例 6-4】　如图 6.34(a)所示，刚架的支座 B 向下移动 Δ，试作出该刚架因支座移动而产生的弯矩图。

解：(1) 确定基本结构。该刚架只有一个基本未知量，即结点 C 的转角 Z_1，在结点 C 处加角变约束得到基本结构。

(2) 列位移法典型方程。附加刚臂的反力矩等于零，即：

$$k_{11}Z_1 + F_{1\Delta} = 0$$

(3) 求系数项和常数项。绘单位弯矩图 M_{12} 及荷载弯矩图 M_P，如图 6.35(b)、(c)所示。

由 M_1 图的结点 C 处可以算出

$$k_{11} = 4i + 4i + 3i = 11i$$

$F_{1\Delta}$ 为位移荷载引起的刚臂 1 的反力矩，由 M_C 图结点 C 处求得

$$F_{1\Delta} = -\frac{6i}{l}\Delta + \frac{3i}{l}\Delta = -\frac{3i}{l}\Delta$$

(4) 将系数、常数项代入典型方程，解出 Z_1。由：

$$11iZ_1 - \frac{3i}{l}\Delta = 0$$

解得：

$$Z_1 = \frac{3}{11}\cdot\frac{\Delta}{l}$$

(5) 用叠加法绘 M 图。由 $M = M_1 Z_1 + M_c$，作结构弯矩图，如图 6.34(d)所示。

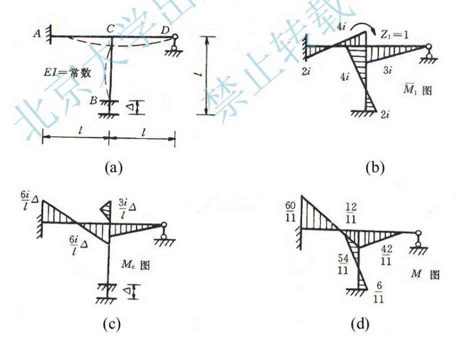


图 6.34

【例 6-5】　试作如图 6.35(a)所示的有侧移刚架的弯矩图。

解：(1)　确定基本结构。按位移法中基本未知量确定的方法，EC 是静定部分，不加约束。 C 为刚结点，有一个角位移；将刚结点变成铰结体系时几何可变，需在 C 或 D 处加水平链杆消除可变，故独立线位移只有一个，为 C 或 D 结点的水平位移。因此基本体

系如图 6.35(b) 所示。此体系中 AC 为两端固定单元，BD、CD 均为一端固定一端铰结单元。

(2) 列位移法典型方程。设刚结点角位移为 Z_1，独立线位移为 Z_2

$$k_{11}Z_1 + k_{11}Z_2 + F_{1P} = 0$$

$$k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + F_{2P} = 0$$

(3) 求系数项和常数项。令角位移 Z_1，线位移 Z_2 分别产生单位位移，则由 3 类单元的形常数可作出单位弯矩图 M_1 和 M_2，如图 6.35(c)所示。荷载下，悬臂部分弯矩图按静定结构作出，超静定部分无荷载，因此基本结构荷载弯矩图 M_P 如图 6.35(d)所示。

k_{11} 为 Z_1=1 引起刚臂 1 的反力矩，由 M_1 图的结点 1 处读出，也就是按图 6.35(e)来求系数，由刚结点的力矩平衡条件，求得刚度系数

$$k_{11} = 6i + 4i = 10i$$

k_{12} 为 Z_2=1 引起的刚臂 1 的反力矩，由 M_2 图结点 1 处求出

$$k_{12} = -6i/l = k_{21}$$

从 M_2 图取柱子为隔离体，由弯矩求出剪力(无荷载时剪力等于两端杆端弯矩之和除以杆长)，然后再取如图 6.35(e)所示的隔离体，由 $\sum X = 0$，求得刚度系数：

$$k_{22} = 15i/l^2$$

同理，从 M_P 图中可求得载常数：

$$F_{1P} = -Pl/2$$

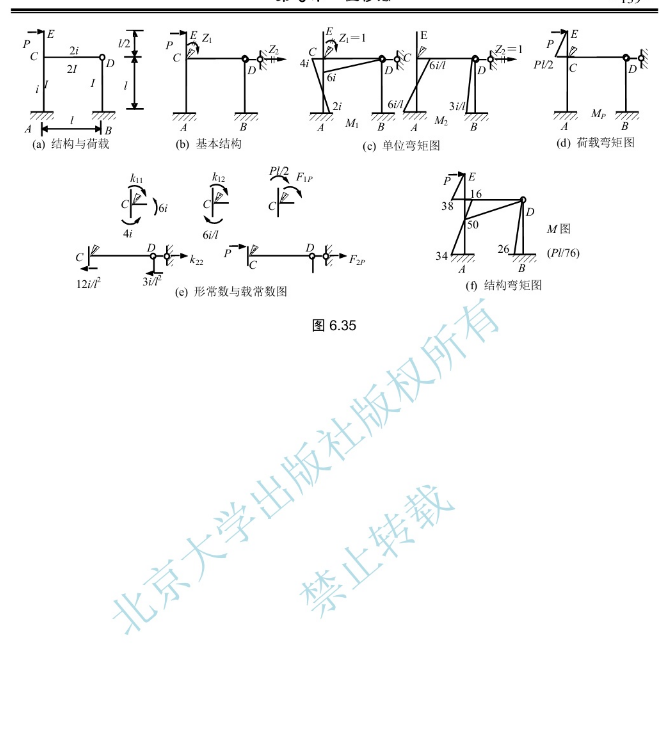
$$F_{2P} = -P$$

(4) 将全部系数、荷载项代入典型方程，解出 Z_1、Z_2。解得：

$$Z_1 = \frac{9Pl}{76i},\quad Z_2 = \frac{13Pl^2}{114i}$$

(5) 用叠加法绘 M 图。$M = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_P$，即可作出如图 6.35(f)所示的结构最终弯矩图。静定部分的弯矩应由静定结构分析求得。

(6) 取刚结点，显然 $\sum M = 0$，也即满足平衡条件。从最终弯矩图求柱子杆端剪力，与求 k_{22} 或 F_{2P} 一样取隔离体，可验证 $\sum X = 0$。因此，计算结果是正确的。



P
E
C
2i
2I
D
l/2
l
i
I
I
A
l
B
(a) 结构与荷载
Z1
Z2
(b) 基本结构
Z1 = 1
4i
6i
2i
M1
Z2 = 1
6i/l
6i/l
3i/l
M2
(c) 单位弯矩图
Pl/2
MP
(d) 荷载弯矩图
k11
6i
4i
k12
6i/l
Pl/2
F1P
12i/l2
3i/l2
k22
F2P
(e) 形常数与载常数图
16
38
50
34
26
M 图
(Pl/76)
(f) 结构弯矩图

图 6.35

6.5　用平衡方程建立位移法方程

位移法方程的建立有两种方法，一种是上面讨论过的典型方程，另一种是根据结点和截面的平衡条件建立位移法方程，通常称为平衡方程。

为了写出结点和截面的平衡方程，首先必须写出各杆的杆端内力的表达式，本章6.2.3节已经对等截面直杆的转角位移方程进行了讨论。单跨超静定梁在荷载、温改和支座移动共同作用下，如图6.15所示，在线性小变形条件下，由叠加原理可得转角位移方程(刚度方程)：

$$\begin{cases} M_{AB}=4i\varphi_A+2i\varphi_B-\dfrac{6i}{l}\Delta_{AB}+M_{AB}^F \\ M_{BA}=4i\varphi_B+2i\varphi_A-\dfrac{6i}{l}\Delta_{AB}+M_{BA}^F \\ Q_{AB}=-\dfrac{6i}{l}\varphi_A-\dfrac{6i}{l}\varphi_B+\dfrac{12i}{l^2}\Delta_{AB}+Q_{AB}^F \\ Q_{BA}=-\dfrac{6i}{l}\varphi_A-\dfrac{6i}{l}\varphi_B+\dfrac{12i}{l^2}\Delta_{AB}+Q_{BA}^F \end{cases} \tag{6-17}$$

已知杆端弯矩，可由杆件的矩平衡方程求出剪力。

$$Q_{AB}=-\frac{M_{AB}+M_{BA}}{l}+Q_{AB}^0 \tag{6-18}$$

其中：i是杆件的线刚度。

有关转角位移方程的具体运用见以下例题。

【例6-6】　利用结点平衡方程计算如图6.36所示刚架，绘M图。各杆抗弯刚度如下：$1A$杆$3EI$，12杆$5EI$，$2B$杆$3EI$，$2C$杆$4EI$。

解：这是无侧移刚架，只有两个结点角位移，用Z_1、Z_2表示。

(1) 列结点平衡方程。

截取结点1为隔离体，如图6.37所示。将作用在结点1上的杆端力矩M_{1A}及M_{12}都画成正向(逆时针)。作用在杆端上的杆端力矩与它等值反向(顺时针)，为清楚起见也将其示于图上。对结点1列力矩方程$\sum M_1=0$，即：

$$M_{1A}+M_{12}=0 \tag{1}$$

再截取结点2为分离体，如图6.37所示。杆端力矩M_{21}、M_{2C}、M_{2B}均按正向画出。对结点2列力矩方程$\sum M_2=0$，即：

$$M_{21}+M_{2B}+M_{2C=0} \tag{2}$$

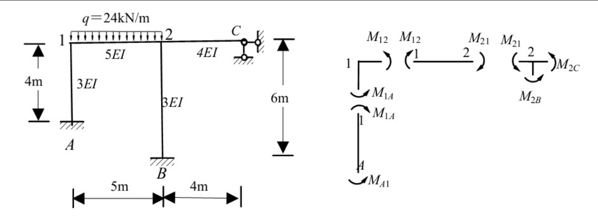


图 6.36　　　　图 6.37

(2) 写出各杆的杆端力矩表达式(转角位移方程)。

$$M_{1A}=4\frac{3EI}{4}Z_1=3EIZ_1$$

$$M_{A1}=2\frac{3EI}{4}Z_1=\frac{3}{2}EIZ_1$$

$$M_{12}=4\frac{5EI}{5}Z_1+2\frac{5EI}{5}Z_2+M_{12}^F=4EIZ_1+2EIZ_2-\frac{1}{12}ql^2$$
$$=4EIZ_1+2EIZ_2-50$$

$$M_{21}=2\frac{5EI}{5}Z_1+4\frac{5EI}{5}Z_2+M_{21}^F=2EIZ_1+4EIZ_2+\frac{1}{12}ql^2$$
$$=2EIZ_1+4EIZ_2+50$$

$$M_{2C}=3\frac{4EI}{4}Z_2=3EIZ_2$$

$$M_{2B}=4\frac{3EI}{6}Z_2=2EIZ_2$$

$$M_{B2}=2\frac{3EI}{6}Z_2=EIZ_2$$

(3) 把杆端力矩表达式代入平衡方程(1)、(2)。

$$3EIZ_1+4EIZ_2+2EIZ_2-50=0$$
$$2EIZ_1+4EIZ_2+50+2EIZ_2+3EIZ_2=0$$

经整理

$$7EIZ_1+2EIZ_2-50=0$$
$$2EIZ_1+9EIZ_2+50=0$$

解以上联立方程，得

$$Z_1=\frac{9.32}{EI}$$

$$Z_2=-\frac{7.63}{EI}$$

通过结构的弹性变形曲线可知，计算所得结果 Z_1 与 Z_2 的符号是正确的。

(4) 代入杆端力矩表达式，计算各杆杆端力矩。

$$M_{1A}=3EI\left(\frac{93.2}{EI}\right)=27.96\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{A1}=\frac{3}{2}EI\left(\frac{93.2}{EI}\right)=13.98\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{12}=4EI\left(\frac{9.32}{EI}\right)+2EI\left(-\frac{7.63}{EI}\right)-50=-27.96\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{21}=2EI\left(\frac{9.32}{EI}\right)+4EI\left(-\frac{7.63}{EI}\right)+50=38.12\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2C}=3EI\left(-\frac{7.63}{EI}\right)=-22.89\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2B}=2EI\left(-\frac{7.63}{EI}\right)=-15.26\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B2}=EI\left(-\frac{7.63}{EI}\right)=-7.63\text{kN}\cdot\text{m}$$

杆端力矩得出后，便可按其大小及正、负绘出弯矩图。

(5) 绘弯矩图。

以杆件 12 为例说明具体做法。由于 M_{12} 为负值，可知杆端力矩绕着杆的 1 端逆时针转动，外侧(上面)受拉，应绘在杆的外侧。由 M_{21} 为正值知，杆端力矩绕着杆的 2 端顺时针转动，外侧(上面)受拉，应绘在杆的外侧。两个竖标连成虚线，再以此虚线为基线，叠加上简支梁承受均布荷载时的弯矩图(其中央值为 $\frac{1}{8}ql^2$)，其他各杆都照这样去作，最终弯矩图如图 6.38 所示。

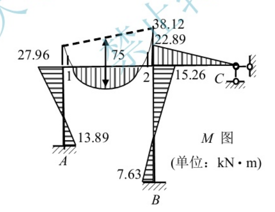


图 6.38

【例 6-7】　计算如图 6.39 所示刚架位移，绘弯矩图。

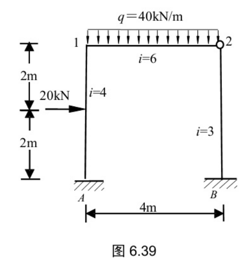


图 6.39

解：基本未知量是结点 1 的转角 Z_1 及柱子两端相对线位移 Z_2(杆 12 水平移动)。

(1) 列平衡方程。

截取结点 1 为对象，如图 6.40 所示。结点 1 应满足 $\sum M_1 = 0$，有：

$$M_{1A} + M_{12} = 0 \tag{1}$$

用一截面沿柱头将刚架截开，取分离体如图 6.42 所示。暴露出来的柱头剪力 Q_{1A} 与 Q_{2B} 都应画成正向，柱头剪力应满足方程 $\sum X = 0$，有：

$$Q_{1A} + Q_{2B} = 0 \tag{2}$$

(2) 写出各杆杆端力矩表达式。

$$M_{1A} = 4i_{1A}Z_1 - \frac{6i_{1A}}{l}Z_2 + M_{1A}^F = 4\times 4Z_1 - \frac{6\times 4}{4}Z_2 + \frac{1}{8}P\times 4$$
$$= 16Z_1 - 6Z_2 + 10$$

$$M_{A1} = 2i_{1A}Z_1 - \frac{6i_{1A}}{l}Z_2 + M_{A1}^F = 2\times 4Z_1 - \frac{6\times 4}{4}Z_2 - \frac{1}{8}P\times 4$$
$$= 8Z_1 - 6Z_2 + 10$$

$$M_{12} = 3i_{12}Z_1 + M_{12}^F = 3\times 6Z_1 - \frac{1}{8}ql^2 = 18Z_1 - 80$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{2B} = 0$$

$$M_{B2} = -\frac{3i_{B2}}{l}Z_2 = -\frac{3\times 3}{4\times 4}Z_2 = -\frac{9}{4}Z_2$$

(3) 写出柱顶剪力表达式。

$$Q_{1A} = -\frac{6i_{1A}}{l_{1A}}Z_1 + \frac{12i_{1A}}{l_{1A}^2}Z_2 + Q_{1A}^F$$
$$= -\frac{6\times 4}{4}Z_1 + \frac{12\times 4}{4\times 4}Z_2 - \frac{20}{2}$$
$$= -6Z_1 + 3Z_2 - 10$$

$$Q_{2B} = +\frac{3i_{2B}}{l_{2B}^2}Z_2 = \frac{9}{16}Z_2$$

也可以不用杆端剪力表达式，而取柱 1A、柱 2B 为隔离体(图 6.41)，由平衡条件给出 Q_{1A}、Q_{2B} 的算式。为了求 Q_{1A}，列方程 $\sum M_A = 0$，

即 $M_{1A} + M_{A1} + P\frac{l}{2} + Q_{1A}l = 0$

$$Q_{1A} = \frac{-M_{1A} - M_{A1} - 40}{4}$$

$$= \frac{-(16Z_1 - 6Z_2 + 10) - (8Z_1 - 6Z_2 - 10) - 40}{4}$$

$$= -6Z_1 + 3Z_2 - 10$$

为了求 Q_{2B}，列方程 $\sum M_B = 0$，即：

$$M_{B2}^{j} + Q_{2B}l = 0$$

$$Q_{2B} = -\frac{M_{B2}}{l} - \frac{9Z_2/4}{l} = \frac{9}{16}Z_2$$

图 6.40

图 6.41

(4) 把杆端力矩、杆端剪力代入平衡方程，并整理得：

$$\left.\begin{aligned} 34Z_1 - 6Z_2 - 70 = 0 \\ -6Z_1 + \frac{57}{16}Z_2 - 10 = 0 \end{aligned}\right\}$$

解出：　　$Z_1 = 3.64$，$Z_2 = 8.94$

(5) 将 Δ_1、Δ_2 之值代回杆端力矩表达式，求杆端力矩。

$$M_{1A} = 16 \times 3.64 - 6 \times 8.94 + 10 = 14.6\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{A1} = 8 \times 3.64 - 6 \times 8.94 - 10 = -34.52\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{12} = 18 \times 3.64 - 80 = -14.48\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B2} = -\frac{9}{4} \times 8.94 = -20.12\text{kN}\cdot\text{m}$$

M 图如图 6.42 所示。

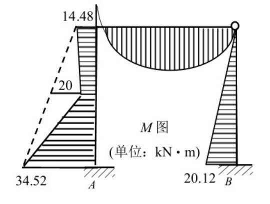


图 6.42

位移法方程的两种建立方法比较如下：

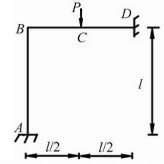
通过前面的例题可见，平衡方程的优点是不必画单位弯矩图和荷载弯矩图，可节约解题篇幅；但也有缺点，由于基本结构没有画出，物理形象不够鲜明，需记住和反复代入许多公式。位移法典型方程比较形象，解题步骤与力法相似，初学者易于掌握。

典型方程和平衡方程所反映的物理概念是一样的。当基本结构发生原有位移，即结构恢复自然状态的时候，附加约束不起作用，无论作用于结点上或是截面上的内力都与外力相平衡。约束不起作用的数学表达式就是典型方程，内外力平衡的数学表达式就是平衡方程。

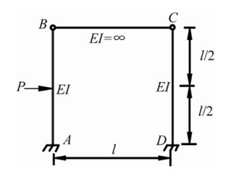
当附加约束不起作用时，内外力平衡；当内外力平衡时，结构处于平衡状态，附加约束不起作用，所以两种方程是等价的。

6.6 习　　题

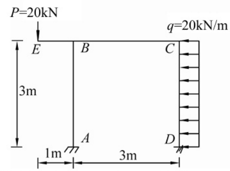
1. 试用位移法计算图示结构并作内力图，EI=常数。



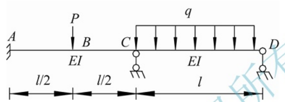
2. 试用位移法求作图示结构的内力图，各柱 EI＝常数。



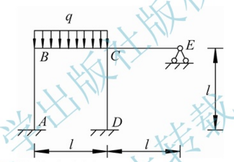
3. 试用位移法求作图示结构的内力图。EI=常数。



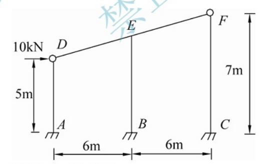
4. 用位移法求下图所示连续梁的内力图，EI=常数。



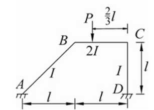
5. 用位移法典型方程计算下图所示刚架，并绘制弯矩图。EI=常数。



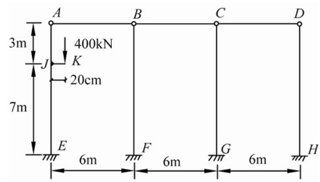
6. 试用位移法求作图示结构的内力图。



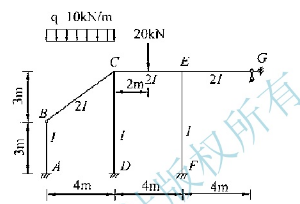
7. 试用位移法求作图示结构的弯矩图。



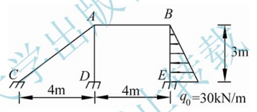
8. 试用位移法计算图示结构并作 M 图，EI=常数。



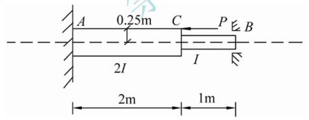
9. 用位移法作图示结构的 M 图。



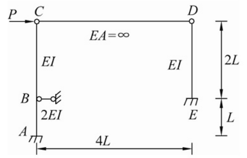
10. 用位移法求作图示结构的 M 图。(提示：无侧移刚架)



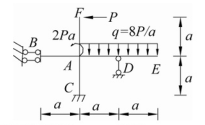
11. 试用位移法求作图示结构的 M 图。



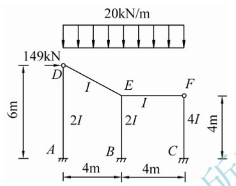
12. 试用位移法求作图示结构的 M 图。



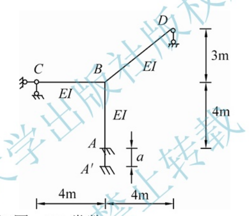
13. 试用位移法求作图示刚架弯矩图。EI=常数。



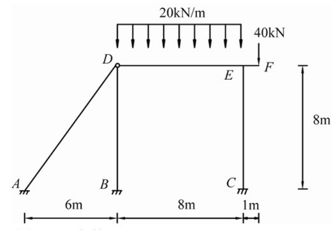
14. 试用位移法求作图示刚架弯矩图，EI=常数。



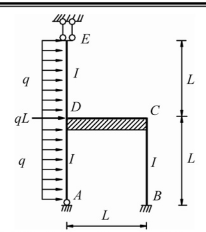
15. 已知 A 支座发生竖向支座沉陷为 a，如图所示，作 M 图。



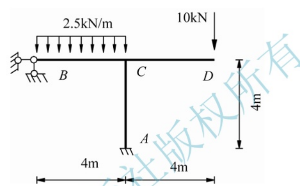
16. 求下图所示刚架弯矩图，EI=常数。



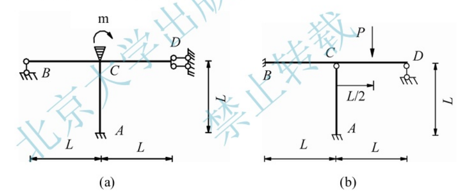
17. 作图示刚架 M 图，EI=常数。



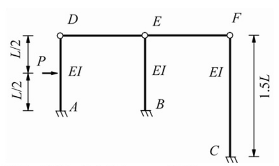
18. 用位移法解下图所示各刚架并作 M 图，EI=常数。



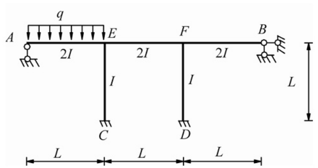
19. 用位移法解下图所示各刚架并作 M 图，EI=常数。



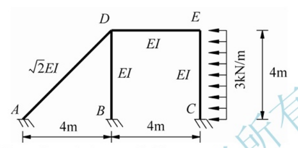
20. 用位移法计算下图所示铰接排架，绘 M 图。



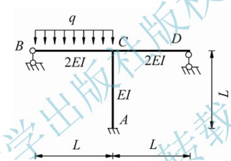
21. 用位移法求作下图所示刚架弯矩图，EI=常数。



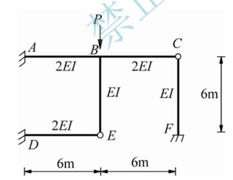
22. 用位移法求作下图所示刚架弯矩图，EI=常数。



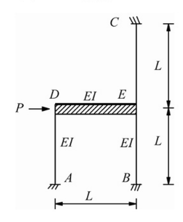
23. 计算下图所示刚架，绘 M 图，EI=常数。



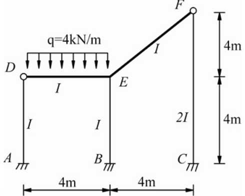
24. 计算下图所示刚架，绘 M 图，EI=常数。



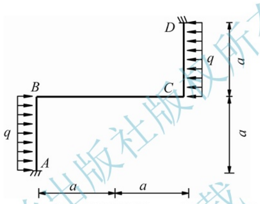
25. 计算如图所示刚架，绘 M 图，EI=常数。



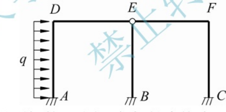
26. 试用位移法作下图所示刚架的 M 图，设各杆 E 值相同。



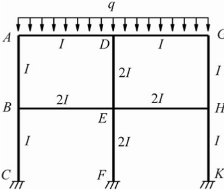
27. 根据结构与所受荷载的特点，试选择适当的方法，求解图示刚架在给定荷载作用下 B 点的转角，EI=常数。



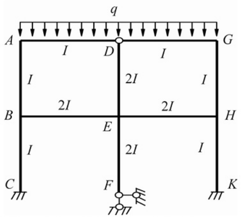
28. 试作图所示结构的 M 图。各杆长度均为 L，设 EI=常数，$EA\rightarrow\infty$。



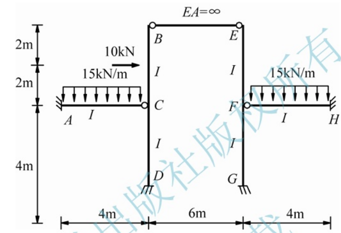
29. 试用位移法求图所示刚架的 M 图。各杆长度均为 L，E 值相同。



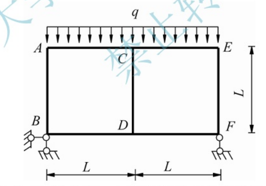
30. 用位移法求图示结构的 M 图。各杆长度均为 L，E 值相同。



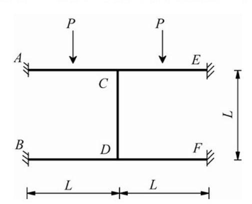
31. 用位移法求图示结构的 M 图。设各杆 E 值相同，$EA\to\infty$。(对称与反对称)



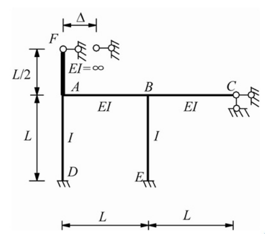
32. 试求下图所示结构的 M 图。设各杆 EI=常数。



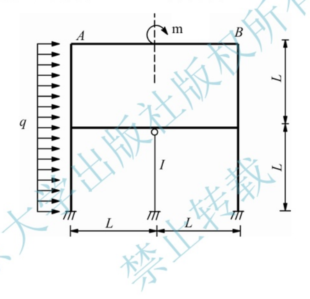
33. 如图所示刚架，设各杆 EI 相同，试求出其最后的 M 图。



34. 试求图示结构在支座 C 发生水平位移 Δ 作用下的 M 图，设杆件 BC 的 EI 值为无限大。



35. 分析如图所示刚架的计算方法，画出等代结构。



第 7 章　力矩分配法

教学提示：力矩分配法是一种广泛使用的实用计算方法，这种方法与力法、位移法相比有其自身的优点，它不需要求方程组，可以直接得到杆端力矩数值。运算过程简单、有序，便于掌握。本章介绍了用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架。

教学要求：要求学生理解力矩分配法的基本概念和原理，熟练掌握用力矩分配法计算连续梁，正确绘出弯矩图，剪力图。会用力矩分配法计算无结点线位移刚架。

7.1　力矩分配法的基本概念

1. 力矩分配法概述

力矩分配法的理论基础仍然是位移法，它适用于连续梁和无侧移刚架等只有角位移作为基本未知量的结构计算，其适用范围显然是连续梁和无侧移刚架，计算对象是杆端弯矩，计算方法是用力矩增量调整修正的方法。

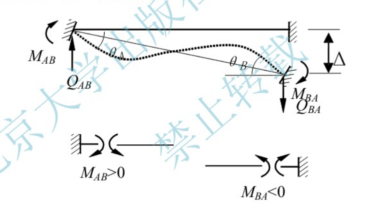


图 7.1

2. 杆端弯矩正负号规定

在力矩分配法中对杆端转角、杆端弯矩、固端弯矩的正负号规定与位移法相同，即都假定对杆端顺时针转动为正。作用于结点上的外力偶荷载，约束力矩，也假定以顺时针转动为正，而杆端弯矩作用于结点上时以逆时针转动为正。

3. 转动刚度 S

转动刚度 S 表示杆端对转动的抵抗能力，　在数值上等于仅使杆端发生单位转动时需在杆端施加的力矩。AB 杆 A 端的转动刚度 S_{AB} 与 AB 杆的线刚度 i(材料的性质、横截面的形状和尺寸、杆长)及远端支承有关，而与近端支承无关。当远端是不同支承时，等截面杆的转动刚度如图 7.2 所示。

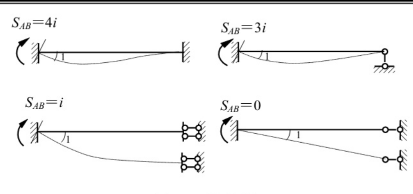


图 7.2　转动刚度

如果把 A 端改成固定铰支座、可动铰支座或可转动(但不能移动)的刚结点，转动刚度 S_{AB} 的数值不变。

4. 传递系数 C

传递系数指的是杆端转动时产生的远端弯矩与近端弯矩的比值。即：

$$C=\frac{M_{远}}{M_{近}} \tag{7-1}$$

利用传递系数的概念，远端弯矩可表达为：$M_{BA}=C_{AB}M_{AB}$。等截面直杆的转动刚度和传递系数见表 7-1。

表 7-1　等截面直杆的转动刚度和传递系数

远端支承	转动刚度	传递系数
固支	$4i$	1/2
铰支	$2i$	0
定向支座	i	−1

7.2　单结点力矩分配法

力矩分配法的基本运算指的是单结点结构的力矩分配法计算。

1. 单结点结构在结点集中力偶作用下的计算

如图 7.3 所示结构，在结点集中力偶 M 作用下使结点转动，从而带动各杆端转动，杆端转动产生的近端弯矩称为分配弯矩，产生远端弯矩称为传递弯矩。

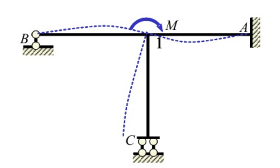


图 7.3　分配系数

分配弯矩：

$$M_{1j}^{\mathrm{d}}=\mu_{1j}M \quad (j=A，B，C) \tag{7-2}$$

传递弯矩：

$$M_{j1}^{c}=C_{1j}M_{1j}\ (j=A，B，C) \tag{7-3}$$

注意：结点集中力偶 M 以顺时针为正，产生正的分配弯矩。

分配系数 μ_{1j} 表示 1_j 杆 1 端承担结点外力偶的比率，它等于该杆 1 端的转动刚度 S_{1j} 与交与结点 1 的各杆转动刚度之和的比值，即：

$$\mu_{ij}=\frac{S_{ij}}{\sum S}，\ \sum\mu=1 \tag{7-4}$$

只有分配弯矩才能向远端传递。

分配弯矩是杆端转动时产生的近端弯矩，传递弯矩是杆端转动时产生的远端弯矩。

2. 单结点结构在跨间荷载作用下的计算

将整个变形过程分为两步。

(1)　在刚结点加刚臂阻止结点转动，如图 7.4(b)所示，将连续梁分解为两根单跨超静定梁，求出各杆端的固端弯矩。结点 B 各杆端固端弯矩之和为附加刚臂中的约束力矩，称为结点不平衡力矩 M_B。

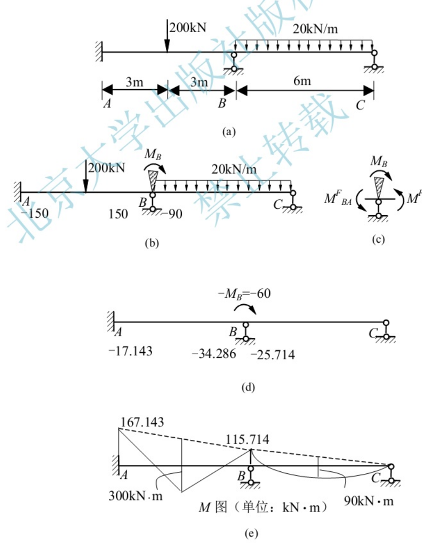


图 7.4　单结点分配过程

(2)　去掉约束，相当于在结点 B　加上负的不平衡力矩 M_B，如图 7.4(d)所示，并将它分给各个杆端及传递到远端。

叠加以上两步的杆端弯矩，得到最后杆端弯矩，如图 7.4(e)所示。

【例 7-1】　如图 7.4(a)所示的连续梁结构，其中各杆 EI 相同，试求杆端弯矩。

解：在计算连续梁时，其过程可直接在梁的下面列表进行，下面的计算是对表中各项计算说明。

(1) 求分配系数

各杆转动刚度

$$S_{BA}=4\frac{EI}{6}=\frac{2EI}{3}$$

$$S_{BC}=3\frac{EI}{6}=\frac{EI}{2}$$

故分配系数：

$$\mu_{BA}=\frac{S_{BA}}{\sum S}\quad\frac{\frac{2EI}{3}}{\frac{2EI}{3}+\frac{EI}{2}}=\frac{4}{7}$$

$$\mu_{BC}=\frac{S_{BC}}{\sum S}\quad\frac{\frac{EI}{2}}{\frac{2EI}{3}+\frac{EI}{2}}=\frac{3}{7}$$

校核：

$$\sum\mu=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\quad 1$$

将它们填入表 7-2 中的第二行。

表 7-2

杆端名称	AB		BA	BC		CB
分配系数 μ			0.5714	0.4286		
固端力矩 M^F	−150		150	−90		0
分配与传递	−17.143	$\xleftarrow{0.5}$	−34.286	−25.714	$\xrightarrow{0}$	0
杆端力矩 M	−167.143		+115.714	−115.714		0

(2) 求各杆固端力矩

如图 7.4(b)所示，左部为两端固定的梁，右部为一端固定另一端铰支的梁。查表算出：

$$M_{AB}^{F}=-\frac{1}{8}Pl=-\frac{1}{8}\times200\times6=-150\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA}^{F}=\frac{1}{8}Pl=\frac{1}{8}\times200\times6=150\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{1}{8}ql^{2}=-\frac{1}{8}\times20\times6^{2}=-90\text{kN}\cdot\text{m}$$

把它们填入表中第三行固端力矩栏相应的位置，再计算结点 B 上各固端力矩的代数和，则结点附加刚臂上的不平衡力矩为：

$$M_B = M_{BA}^F + M_{BC}^F = 150 - 90 = 60\text{kN} \cdot \text{m}$$

(3) 计算分配力矩与传递力矩。

如图 7.4(d)所示，对不平衡力矩 M_B 反向分配：

$$M_{BA}^d = \mu_{BA}\left(-M_B\right) = \frac{4}{7} \times (60) = 34.286\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^d = \mu_{BC}\left(-M_B\right) = \frac{3}{7} \times (60) = 25.714\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB}^c = C_{AB}\left(M_{BA}^d\right) = 0.5 \times 34.286 = 17.143\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^c = C_{BC}\left(M_{BC}^d\right) = 0$$

把它们填入表中第四行分配与传递栏相应的位置，并在分配力矩下面画一横线，表示分配与传递工作结束。

(4) 求最终杆端力矩。

将各杆杆端力矩与分配力矩(或传递力矩)相加，得到最终杆端力矩。也可将表中第三行和第四行相加，得最终杆端力矩。

$$M_{AB} = (-150) + (-17.143) = -167.143\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = (150) + (-34.286) = 115.714\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = (-90) + (-25.714) = -115.714\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = 0$$

将最终结果填入表中的第四行。

(5) 平衡验算。

结点 B 处应满足 $\sum M_B = 0$，对于本例：

$$\sum M_B = (+115.714) + (-115.714) = 0$$

(6) 绘 M 图。

按表格最末一行所示的杆端力矩来画。以杆件 AB 为例，杆端力矩 M_{AB} 为负，杆端力矩应当为绕 A 端逆时针方向，故画在横线以上，M_{BA} 为正，杆端力矩则应为绕 B 端顺时针方向，也画在横线以上。把杆端力矩的纵坐标连一虚线，再叠加上集中荷载 200kN 的影响，其中点值按简支梁计算，200kN×6m/4=300kN·m。用相同的方法画杆件 BC。最终弯矩图如图 7.4(e)所示。

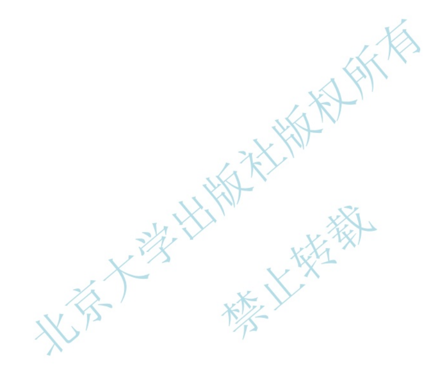
应当指出：

(1) 运用力矩分配法时，变形过程被想象成两个阶段。第一阶段是固定结点，加载，得到的是固端力矩。第二阶段是放松结点，产生的力矩是分配力矩与传递力矩。

(2) 进行力矩分配之前，必须明确被分配的力矩等于多大，是正值还是负值。认定无误之后再进行分配。

结点的不平衡力矩等于刚结在结点上各杆固端力矩的代数和，它有正、负之分。进行分配时，先将不平衡力矩变号，然后乘以各杆的分配系数，这样得到的便是相应杆的分配力矩，然后向另端传递，得到传递力矩。

【例 7-2】　用力矩分配法计算如图 7.5(a) 所示刚架，绘 M 图。



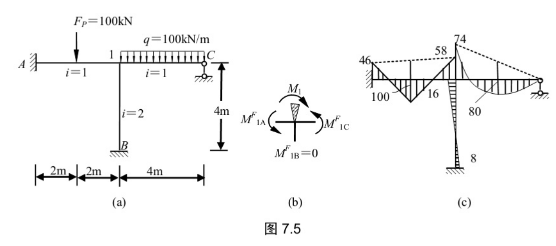


图 7.5

解：该结构只有一个刚结构，属单结构力矩分配问题。

(1) 求分配系数。

$$\mu_{1A}=\frac{S_{1A}}{\sum S}\quad\frac{4i_{1A}}{4i_{1A}+3i_{1C}+4i_{1B}}=\frac{4\times1}{4\times1+3\times1+4\times2}=\frac{4}{15}$$

$$\mu_{1C}=\frac{S_{1C}}{\sum S}\quad\frac{4i_{1C}}{4i_{1A}+3i_{1C}+4i_{1B}}=\frac{3\times1}{4\times1+3\times1+4\times2}=\frac{3}{15}$$

$$\mu_{1B}=\frac{S_{1B}}{\sum S}\quad\frac{4i_{1B}}{4i_{1A}+3i_{1C}+4i_{1B}}=\frac{4\times2}{4\times1+3\times1+4\times2}=\frac{8}{15}$$

校核：
$$\sum\mu=\frac{4}{15}+\frac{3}{15}+\frac{8}{15}=1$$

(2) 求固端力矩。

查表 6-2，按给定的公式计算

$$\begin{cases}M_{A1}^F=-\dfrac{1}{8}Pl=-\dfrac{1}{8}\times100\times4=-50\text{kN}\cdot\text{m}\\ M_{A1}^F=\dfrac{1}{8}Pl=50\text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$$\begin{cases}M_{1C}^F=-\dfrac{1}{8}ql^2=-\dfrac{1}{8}\times40\times4^2=-80\text{kN}\cdot\text{m}\\ M_{C1}^F=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}M_{1B}^F=0\\ M_{B1}^F=0\end{cases}$$

结点 1 的不平衡力矩等于汇交在结点 1 上各杆固端力矩的代数和。

即
$$M_1=M_{1A}^F+M_{1C}^F+M_{1B}^F=50+(-80)+0=-30\text{kN}\cdot\text{m}$$

其原因说明如下：

取结点 1 为分离体(带有附加刚臂)，如图 7.5(b)所示，固端力矩 M_{1A}^F、M_{1C}^F 均画成正向(绕结点逆时针为正)，附加刚臂的反力矩也画成正向(顺时针为正)。根据力矩平衡方程 $\sum M=0$，有

$$M_1=M_{1A}^F+M_{1C}^F=50+(-80)=-30\text{kN}\cdot\text{m}$$

可见，不平衡力矩就是附加刚臂的约束反力，在明确了它的物理概念后，可按固端力矩相加的办法直接算出。

(3) 分配与传递。

将不平衡力矩 M_1 变号，被分配的力矩是正值，具体计算如下：

$$M_{1A}^{d}=\mu_{1A}\left(-M_{1}\right)=\frac{4}{15}\times 30=8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1B}^{d}=\mu_{1B}\left(-M_{1}\right)=\frac{8}{15}\times 30=16\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1C}^{d}=\mu_{1C}\left(-M_{1}\right)=\frac{3}{15}\times 30=6\text{kN}\cdot\text{m}$$

传递力矩

$$M_{A1}^{c}=C_{1A}\left(M_{1A}^{d}\right)=0.5\times 8=4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B1}^{c}=C_{B1}\left(M_{1B}^{d}\right)=0.5\times 16=8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1C}^{c}=C_{1C}\left(M_{1C}^{d}\right)=0$$

(4) 计算杆端力矩。

$$\begin{cases}M_{A1}=M_{A1}^{F}+M_{A1}^{c}=-50+4=-46\text{kN}\cdot\text{m}\\ M_{A1}^{F}=M_{A1}^{F}+M_{A1}^{d}=50+8=58\text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$$\begin{cases}M_{1B}=M_{1B}^{d}=16\text{kN}\cdot\text{m}\\ M_{B1}=M_{B1}^{d}=8\text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

$$\begin{cases}M_{1C}=M_{1C}^{F}+M_{1C}^{d}=-80+6=-74\text{kN}\cdot\text{m}\\ M_{C1}=0\end{cases}$$

通常，计算采用列表运算，按上一例的办法，将上述结果列于表 7-3 中：

表 7-3

结点名称	A	1			B	C
杆端名称	$A1$	$1A$	$1C$	$1B$	$B1$	$C1$
分配系数 μ		4/15	3/15	8/15		
固端力矩 M^F	−50	+50	−80	0	0	0
分配与传递	+4	+8	+6	+16	+8	0
杆端力矩 M	−46	+58	−74	+16	+8	0

(5) 绘弯矩图。

先画出各杆的杆端力矩，在两个纵坐标之间连一直线，以此为基线叠加上横向荷载引起的简支梁的弯矩。作出的 M 图如图 7.5(c)所示。

7.3　多结点力矩分配法——渐进运算

对于单结点弯矩分配法如上所述，它是位移法的变种(求解步骤不同，实质一样)，是一种精确的方法。通过固定结点，放松结点，只进行一次分配和传递就可使体系恢复原来的状态，当然，力矩的分配与传递也是一次即告结束。那么对多结点的情况，它能否不列

位移法方程，也通过分配、传递等步骤来解决呢？这时解答是否还是精确的呢？

由分配系数的计算公式可见，分配系数恒小于 1。另外，支座处只接受所传递来的力矩(因为支座刚度可视为无限大，因此支座处杆端的分配系数为 0)不再分配，所以传递系数也小于 1。注意到这一点，就可以明白结点结构的弯矩分配也可按一系列的单结点弯矩分配使结构逐渐趋于平衡。下面以连续梁为例加以说明。

通常遇到的连续梁，中间支座不止一个，也就是说，结点转角未知量不止一个，如何把单结点的力矩分配方法推广运用到多结点的结构上，是本节将要讨论的问题。为了达到这一目的，必须人为地造成只有一个结点转角的情况，采取的办法是首先固定全部刚结点，然后逐次放松，每次只放松一个。当放松一个结点时，其他结点暂时固定。由于一个结点是在别的结点固定的情况下放松的，所以还不能恢复原来的状态。这样一来，就需要将各结点反复轮流地固定、放松，以逐步消除结点的不平衡力矩，使结构逐渐接近其本来的状态。具体做法以图 7.6(a)所示连续梁进行说明。

首先，同时固定结点 1、2(加附加刚臂)，然后加荷载，此时情况如图 7.6(b)所示。梁 A_1 无固端力矩，梁 12 是两端固定梁，梁 $2B$ 是一端固定另端铰支梁。它们的固端力矩为：

$$\begin{cases} M_{2B}^F = -\dfrac{3}{16}Pl = -\dfrac{3}{16}\times 50\times 8 = -75\text{kN}\cdot\text{m} \\ M_{B2}^F = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{12}^F = -\dfrac{1}{12}ql^2 = -\dfrac{1}{12}\times 24\times 8^2 = -128\text{kN}\cdot\text{m} \\ M_{21}^F = \dfrac{1}{12}ql^2 = \dfrac{1}{12}\times 24\times 8^2 = 128\text{kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

把固端力矩记入表 7-4 第二行。为便于讨论，把固端力矩写在图 7.6(b)相应的杆端。固端力矩写出后，结点 1、2 的不平衡力矩便容易求出

$$M_1 = \sum M_{1i}^F = M_{1A}^F + M_{12}^F = 0 + (-128) = -128\text{kN}\cdot\text{m}\ (\text{逆时针方向})$$

$$M_2 = \sum M_{2i}^F = M_{21}^F + M_{2B}^F = 128 + (-75) = 53\text{kN}\cdot\text{m}\ (\text{顺时针方向})$$

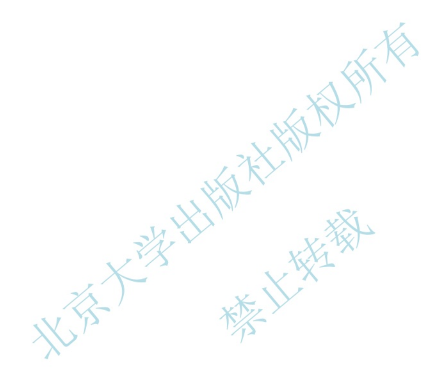
把它们分别示于图 7.6(b)的结点 1、2 上。以上所进行的工作是力矩分配法的第一阶段——固定结点、计算固端力矩、计算不平衡力矩(约束反力矩)。

下面要进行的属于第二阶段——轮流放松结点，逐次计算各杆的分配力矩、传递力矩。

表 7-4

杆端名称		$A1$	$1A$	12		21	$2B$	$B2$
分配系数 μ		0.6		0.4		0.4	0.6	
固端力矩 M^F		0	0	−128		+128	−75	0
分配与传递	放松结点 1	+76.8		+51.2	—0.5→	+25.6		
	放松结点 2			−15.7	←0.5—	−31.4	−47.2	
	放松结点 1	+9.4		+6.3	—0.5→	+3.2		
	放松结点 2			−0.7	←0.5—	−1.3	−1.9	
	放松结点 1	+0.4		+0.4	—0.5→	+0.2		

	放松结点 2			$\underline{-0.1}$		$\underline{-0.1}$	
杆端力矩 M		0	+86.6	−86.6	+124.2	−124.2	0



如果同时在结点 1、2 上分别加上与 M_1、M_2 等值反向的力矩，这意味着结点 1、2 同时放松，如图 7.6(c)所示。但是，图 7.6(c)所示情况不能用上节讲过的方法进行计算，所以不能把两个结点同时放松，必须单独放松一个结点，把它化为单结点的力矩分配问题。

先放松哪个结点呢？为了使计算尽快地收敛，先放松不平衡力矩大的结点，本例应先放松结点 1。放松结点 1 时，结点 2 还在固定着如图 7.6(d)所示，这就人为地造成了单结点的情况，可按上节讲过的单结点力矩分配法计算。

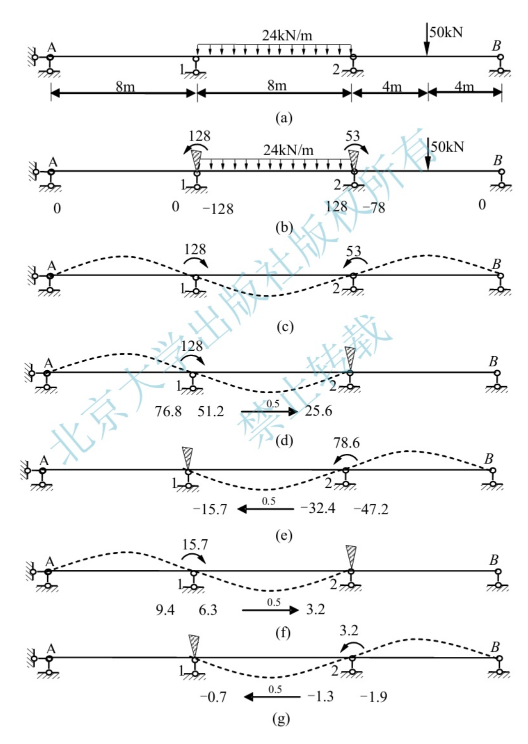


图 7.6 多余结点分配过程

首先求分配系数。

结点 1

$$\mu_{1A}=\frac{3i_{1A}}{3i_{1A}+4i_{12}},\quad \mu_{12}\ \frac{4i_{12}}{3i_{1A}+4i_{12}}$$

式中，

$$i_{1A}=\frac{2EI}{8}=\frac{EI}{4},\quad i_{12}=\frac{EI}{8}$$

为了便于计算，采用相对线刚度，设 $\frac{EI}{8}=1$，则 $i_{1A}=2$，$i_{12}=1$，于是分配系数

$$\mu_{1A}=0.6=\mu_{12}\quad 0.4$$

结点 2

同上理求得

$$\mu_{21}=0.4=\mu_{2B}\quad 0.6$$

将其填入表 7-4 第二行。

其次计算分配力矩和传递力矩。

分配结点 1 时，锁住结点 2，结点 2 在分配中相当于一固定端。结点 1 的不平衡力矩 $M_1=-128\text{kN}\cdot\text{m}$

分配力矩

$$M_{1A}^{d_1}=\mu_{1A}(-M_1)=0.6\times128=76.8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{12}^{d_1}=\mu_{12}(-M_1)=0.4\times128=51.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

传递力矩

$$M_{21}^{c_1}=\frac{1}{2}M_{12}^{d_1}=0.5\times51.2=25.6\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{A1}^{c_1}=0$$

将此计算数据填入“分配与传递”栏中的第 1 行。完毕后在结点 1 的分配力矩下画一横线，表示该结点放松完毕。横线以上的杆端力矩总和为零，这标志结点 1 处于平衡，但并没有恢复到自然状态，因为结点　2 还没有被放松。下面放松结点　2，进行力矩分配和传递。

分配结点 2 时，锁住结点 1，结点 1 在分配中相当于一固定端。结点 2 的不平衡力矩：$M_1=128-75+25.6=78.6\text{kN}\cdot\text{m}$

分配力矩

$$M_{21}^{d_1}=\mu_{21}(-M_2)=0.4\times(-78.6)=-31.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2B}^{d_1}=\mu_{2B}(-M_2)=0.6\times(-78.6)=-47.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

传递力矩

$$M_{12}^{c_1}=\frac{1}{2}M_{21}^{d_1}=0.5\times(-31.4)=-15.7\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B2}^{c_1}=0$$

将此计算数据填入“分配与传递”栏中的第 2 行。完毕后在结点 2 的分配力矩下画一横线，表示该结点放松完毕。横线以上的杆端力矩总和为 0，这标志结点 2 处于平衡，但并没有恢复到自然状态，因为结点 1 被锁住后还没有被放松。

下面再放松结点 1，锁住结点 2，结点 1 的不平衡力矩来自于结点 2 的第 1 次传递，则 $M_1 = M_{12}^{C_1} = -15.7\text{kN}\cdot\text{m}$ 。按第 1 次分配的过程再来一次。如此循环，直到其结构达到所需力矩精度要求为止。在本例中，力矩精度要求到小数点后一位为止，不再传递，这时结构已接近自然状态。

把固端力矩与历次放松结点产生的杆端力矩相加，即得最终的杆端力矩。即

杆端力矩＝固端力矩+Σ 分配力矩+Σ 传递力矩

也就是说，把表中同一杆端下面的力矩代数相加，就得到杆的最终杆端力矩。例如：

$$M_{21} = 128 + 25.6 - 31.4 + 3.2 - 1.3 + 0.2 - 0.1 = +124.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2B} = -75 - 47.2 - 1.9 - 0.1 = -124.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

各杆杆端力矩填入最后一行。

计算结束后，应当进行平衡条件的校核。例如：

对于结点 1：$\sum M_1 = 86.6 - 86.6 = 0$

对于结点 2：$\sum M_2 = 124.2 - 124.2 = 0$

最后依据杆端力矩绘出弯矩图，如图 7.7 所示。

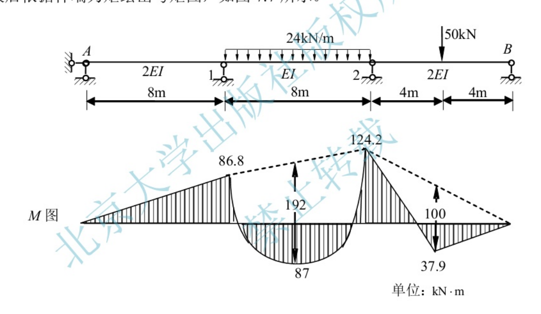


图 7.7

归纳上述分析，其计算过程有如下几步。

(1) 求各刚结点处的分配系数 μ 。

(2) 求各杆的固端力矩 M^F 。

(3) 把各结点固端力矩分别相加(代数和)，求出结点的不平衡力矩 M。

(4) 对结点 1 进行力矩分配与传递(先分配较大的一个)。分配时 M 变号，分配与传递完毕后在下方画一横线以示横线以上部分已经考虑完毕，结点已经平衡。

(5) 对结点 2 进行力矩分配与传递。

(6) 如此轮流对结点 1、结点 2 进行不平衡力矩的分配与传递，直到不平衡力矩达到精度要求为止。

(7) 计算杆端力矩。

(8) 平衡验算。

(9) 根据杆端力矩绘弯矩图。

【例 7-3】　用力矩分配法计算如图 7.8 所示连续梁，绘 M 图。

表 7-5

杆端名称		AB	BA	BC		CB	CD	DE
分配系数			0.529	0.471		0.625	0.375	
固端力矩		0	+40.00	−50.0		+50.00	+10.00	+20.0
分配与传递	放松结点2			−18.75.	←	−37.50	−22.50	
	放松结点1		+15.21	+13.54	→	+6.77		
	放松结点2			−2.12	←	−4.23	−2.54	
	放松结点1		+1.12	+1.00	→	+0.50		
	放松结点2			−0.16	←	−0.31	−0.19	
	放松结点1		+0.08	+0.08	→	+0.04		
	放松结点2			−0.02	←	−0.03	−0.02	
	放松结点1		+0.01	+0.01				
杆端力矩		0	+56.42	−56.42		+15.24	−15.25	+20.00

解：该结构带有悬臂端。悬臂端 D 为一静定部分，其内力可按静力平衡条件求出：

$$M_{DE} = -10 \times 2 = -20\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$Q_{DE} = 20\text{kN}$$

去掉悬臂部分，把 M_{DE}、Q_{DE} 作为外力施加在结点 D 上，则结点 D 可视为铰支座，原结构可按图 7.8(b)计算，它只有两个结点转角未知量(B、C 处)

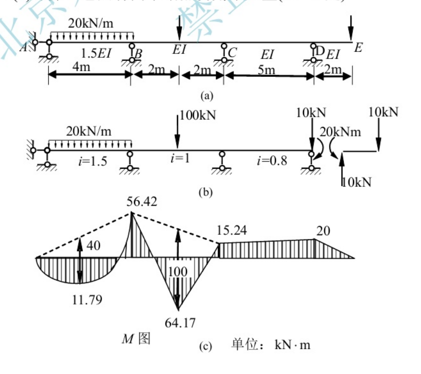


图 7.8

计算步骤如下：

(1) 求分配系数 1，取 EI=4，则有：

$$i_{AB}=\frac{1.5EI}{l_{AB}}=\frac{1.5\times4}{4}=1.5$$

$$i_{BC}=\frac{EI}{l_{BC}}=\frac{4}{4}=1$$

$$i_{CD}=\frac{EI}{l_{BC}}=\frac{4}{5}=0.8$$

将各杆的线刚度记入连续梁各杆的下面，分配系数：

$$\mu_{BA}=\frac{3i_{AB}}{3i_{AB}+4i_{BC}}=\frac{3\times1.5}{3\times1.5+4\times1}=0.529$$

同理有 $\mu_{BC}=0.471$，μ_{CB} 0.625 　μ_{CD} 0.375。

分配系数计算结果已填写在表 7-5 的第二行中。这里要注意，在基本结构中，杆 CD 是 C 端固定，D 端铰支杆，$S_{CD}=3i_{CD}$。

(2) 求固端力矩。

$$M_{BA}^{F}=\frac{1}{8}ql^2=\frac{1}{8}\times20\times4^2=40\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=-\frac{1}{8}Pl=-\frac{1}{8}\times100\times4=-50\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA}^{F}=\frac{1}{8}Pl=+50\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^{F}=+20\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^{F}=\frac{1}{2}M_{DC}=\frac{1}{2}\times20=10\text{kN}\cdot\text{m}$$

这里要说明一点：在基本结构中，杆 CD 为 C 端固定、D 端铰支杆，在 D 端承受力偶 20kN·m 及集中力 10kN。集中力 10kN 作用于支座上不产生弯矩，作用在支座 D 上的力偶 20kN.m 产生的固端力矩 $M_{CD}^{F}=20\text{kN}\cdot\text{m}$，在另端的固端力矩 $M_{CD}^{F}=\frac{1}{2}M_{DC}^{F}=10\text{kN}\cdot\text{m}$ (由表 6-2 查得)。固端力矩记入第三行。

由于结点 C 的不平衡力矩大，所以先放松结点 C。最大固端力矩是两位数，取四位有效数字，故取到小数点后两位。

(3) 放松结点 C。将 M_{C} 变号，分别乘以分配系数。分配传递过程记入表 7-5 中第四行。这里 D 端是铰支端，故传递力矩为零。

(4) 放松结点 B(固定结点 C)。此时，结点 B 的不平衡力矩

$$M_{\text{B}}=+40-50-18.75=-28.75\text{kN}\cdot\text{m}$$

分配传递过程记入第五行。

(5) 再次放松结点 C(固定结点 B)。结点 C 的不平衡力矩为传递力矩($6.77\,\text{kN}\cdot\text{m}$)，分配与传递过程记入第六行。

(6) 再次放松结点 B，此时该结点的不平衡力矩为传递力矩($-2.12\text{kN}\cdot\text{m}$)。分配传递过程记入第七行。

继续轮流固定、放松……。

(7) 计算杆端力矩，如表 7-5 中杆端力矩行(最后一行)所示。

(8) 根据杆端力矩绘 M 图，如图 7.8 中 M 图所示。

(9) 静力平衡校核，由各结点是否满足 $\sum M = 0$ 来校核。结点 C 上有 0.01 的误差，与弯矩值 15.24 相比，甚小，可以认为满足要求。

【例 7-4】 试用弯矩分配法求如图 7.9(a)所示的无侧移刚架结构弯矩图(计算 2 轮)。

解：这是两个结点(多结点)弯矩分配问题。首先根据题目条件锁定 C、D 弹性结点，可作出如图 7.9(b)所示固端弯矩图。再根据题目条件可得各杆的线刚度，根据它端支承条件，可得转动刚度分别为：

$$S_{CA} = S_{CD} = S_{DB} = S_{DC} = 4i$$
$$S_{DE} = 2i$$

由此可得分配系数为：

$$\mu_{CA} = \mu_{CD} = \frac{4i}{4i+4i} = 0.5$$
$$\mu_{DB} = \mu_{DC} = \frac{4i}{4i+4i+2i} = 0.4$$
$$\mu_{DE} = \frac{2i}{4i+4i+2i} = 0.2$$

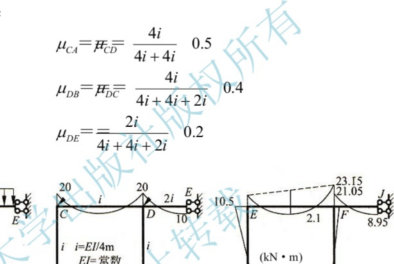


图 7.9

(1) 首先将结点的分配和传递系数标于如图 7.10 所示的图上。

图 7.10

(2) 将固端弯矩分别标注在图 7.10 所示相应分配系数下方及他端处。

(3) 因为 C 结点不平衡力矩大，所以先分配，D 结点后分配。按所求得的不平衡力矩变号后乘分配系数得分配力矩。

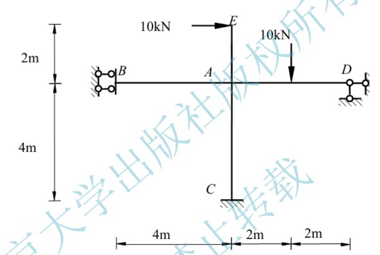
(4) 根据他端条件确定传递系数，将分配力矩向他端传递，并返回第(3)步进行两轮分配传递。

(5) 叠加固端弯矩、分配或传递弯矩，得杆端最终弯矩。

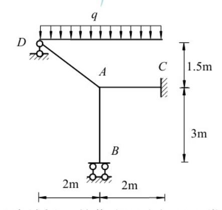
(6) 根据杆端弯矩作出如图 7.9(c)所示最终弯矩图。

7.4 习　　题

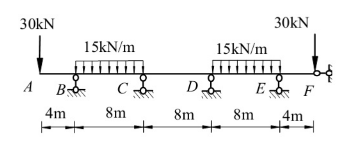
1. 求图示结构的力矩分配系数和固端弯矩，并画出图示结构的弯矩图，EI=常数。



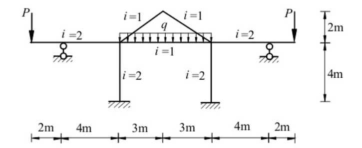
2. 求图示结构的力矩分配系数和固端弯矩。已知 $q=20\text{kN/m}$，各杆 EI 相同。



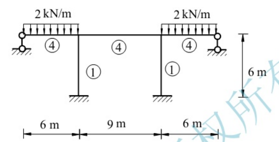
3. 用力矩分配法计算图示连续梁，并作出 M 图，EI=常数。



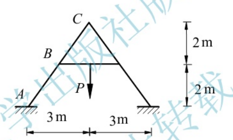
4. 用力矩分配法作图示结构的 M 图。已知 P=8kN，q=4kN/m (每个结点分配两次)。



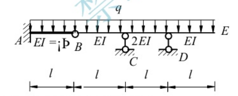
5. 用力矩分配法计算图示结构，并作 M 图 (各杆线刚度比值如图所示)。



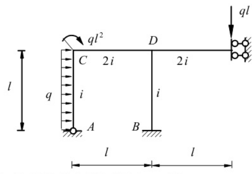
6. 用力矩分配法作图示对称结构的 M 图。已知 P=10kN，EI=常数。



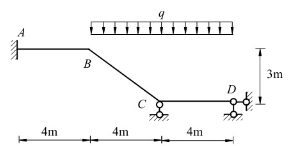
7. 用力矩分配法计算图示结构，并作 M 图。



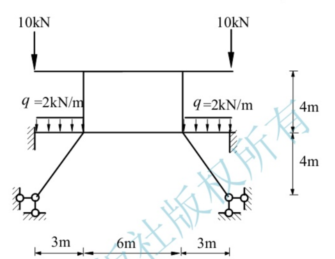
8. 试写出图示结构的力矩分配系数与固端弯矩。



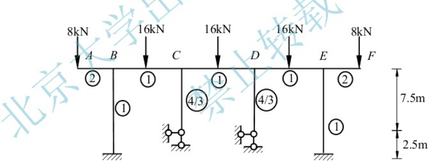
9. 求图示结构的力矩分配系数和固端弯矩。已知：q=20kN/m，各杆 EI 为常数。



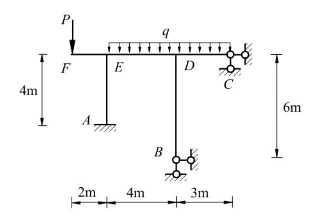
10. 用力矩分配法计算图示对称结构，并作 M 图。EI=常数(计算两轮)。



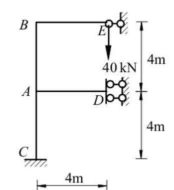
11. 用力矩分配法计算图示结构，并作 M 图。图中圆圈内表示各杆相对线刚度 (计算两轮)。



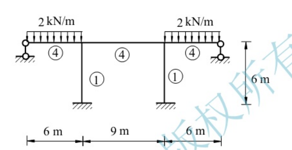
12.　用力矩分配法作图示结构的 M 图。已知：P=30kN，q=240kN/m，各杆 EI 相同(每个结点分配两次)。



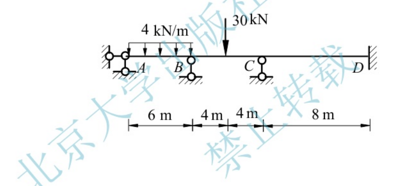
13. 求图示结构的力矩分配系数和固端弯矩，EI=常数。



14. 用力矩分配法计算图示结构，并作 M 图 (各杆线刚度比值如图所示)。



15. 用力矩分配法绘制图示连续梁的弯矩图，EI 为常数 (计算两轮)。



第 8 章　影响线及其运用

教学提示：影响线主要是讨论静定结构和超静定结构内力(反力)的影响线的做法和运用。

它的理论依据主要是静力平衡方程和虚功原理。影响线和内力图从图形的形状上看有些情况下是相似的，但实质上他们是完全不同的两个问题。影响线是影响系数与荷载位置间的关系曲线，它与内力分布图是有区别的。内力分布图是描述固定荷载作用下，内力沿结构各个截面的分布；而影响线是描述单位集中荷载在不同位置作用时对结构中某固定处某量的影响。影响线可运用静力法和机动法来绘制。根据影响线可以确定各种荷载作用时的影响值，并用以确定移动荷载的不利位置。

教学要求：影响线主要运用于有移动荷载作用的工程结构，比如桥梁、厂房中的一些移动起吊设备和移动荷载作用的特殊结构。学生在学习影响线时首先必须掌握影响线的概念，学会用静力法和机动法绘制单跨静定梁、静定连续梁、静定桁架、简单刚架以及用机动法绘制超静定连续梁影响线的轮廓线。对于由直线图形构成的影响线，还必须学会用影响线来确定临界荷载以及荷载的最不利位置。

8.1　移动荷载和影响线的概念

前面各章讨论了结构在静止荷载作用下的计算方法。这类荷载的大小、方向以及作用点在结构上的位置是固定不变的，因此，结构的反力和各处的内力及位移也是不变的。但在工程中，有些结构除了承受上述恒定荷载外，还受到移动荷载的作用，例如吊车梁承受吊车荷载；桥梁承受车辆荷载；又如房屋楼面上的人群、货物或非固定的设备等可以任意布置的分布荷载，都属于活载的范围。随着荷载作用点位置的变化，将引起结构的反力、内力和位移等这些量值的变化。在设计结构时，需要知道在移动荷载的作用下．结构产生的某些量值的最大值，该值称为最大量值。出现最大量值的荷载位置，称为最不利荷载位置。本章的主要内容是研究结构的反力、内力和位移随荷载移动而变化的规律。在这里不考虑荷载移动对结构产生的动力作用，因此仍属于静力计算问题。

结构在移动荷载作用下的状态将随荷载作用位置的不同而变化，这样，就需要解决以下新问题。

(1) 结构在某一量值(内力、反力或位移)随荷载作用位置变动时的变化规律。

(2)　确定上述量值达到最大时移动荷载的作用位置，即该量值的最不利荷载位置，并求出相应的最不利值。

(3) 确定结构各截面上内力变化的范围，及内力变化的上限和下限。

以上第一条是基础，第二、第三条是进一步的运用，可为设计提供相应的依据。

移动荷载是多种多样的，一般是由若干个大小和间距保持不变的竖向荷载所组成，此时的荷载就称为移动荷载组。

如图 8.1 所示简支梁 AB 上有辆汽车向右行驶，用汽车的两个轮子可看成两个间距不变的竖向荷载 F_{p1} 和 F_{p2}，其中某一荷载与梁 A 端的距离用 x 表示。车辆向前行驶时，A 端支座反力 F_{yA} 逐渐减小，而 B 端的支座反力 F_{yB} 逐渐增大。此时，梁内不同截面处内力变化的规律也是不同的。即使在同一截面处，不同内力的变化规律也不相同。因此作为最基础的研究，可以从单一的移动荷载作用下给定截面上某种量值的变化规律开始着手，并取荷载为单位荷载。

单位移动荷载作用下表示结构某一量值(称为影响线)变化规律的图形，就称为该量值的影响线。所谓单位荷载是数值和量纲均为 1 的量，它可以在实际移动荷载可到达的范围内移动。在求得了某一量值的影响线之后，就可以用叠加原理，进而求得实际的移动荷载组所引起的该量值的变化规律。

现以图 8.1 为例，说明影响线的绘制过程。在图 8.2(a)中以 x 表达单位移动荷载 $F_p=1$ 的作用位置。若需绘制 B 支座反力的影响线，可以通过改变位置参数来进行。显然，当 $x=0$ 时，$F_{yB}=0$；$x=l$ 时，$F_{yB}=1$；当 x 在 A、B 之间变化时，F_{yB} 是 x 的线性函数。于是可以作出如图 8.2(b)所示 F_{yB} 的影响线，它形象地表明了支座反力 F_{yB} 随单位荷载 $F_p=1$ 的移动而变化规律。影响线上的某竖标 y 则表示 $F_p=1$ 作用与该处时，B 支座反力 F_{yB} 的值。

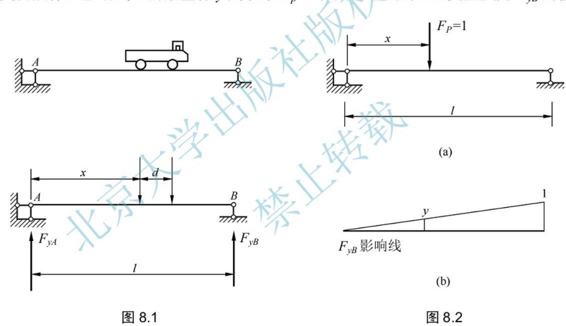


图 8.1　　图 8.2

8.2 静力法作单跨静定梁的影响线

8.2.1 反力影响线

静力法是应用静力平衡条件，求出某量值的影响线方程，再绘出其影响线的方法。下面分别叙述绘制如图 8.3 所示简支梁的反力影响线的方法。以 A 点为坐标原点，以 x 表示荷载 $P=1$ 作用点的横坐标。

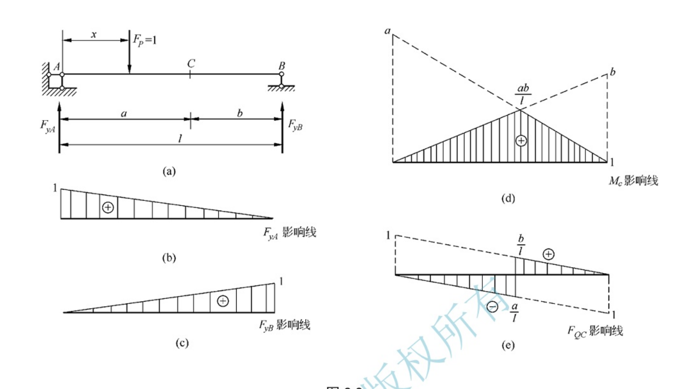


图 8.3

取 AB 梁为隔离体，对 B 点取矩 $\sum M_B = F_{yA}l - F_P(l-x) = 0$ ，得

$$F_{yA} = F_P\frac{l-x}{l} = \frac{l-x}{l} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{8-1}$$

式(8-1)表示反力 F_{yA} 随荷载 F_P=1 位置的变化而变化的规律，即 F_{yA} 影响线方程，因为式(8-1)是 x 的一次函数，所以 F_{yA} 的影响线为一直线，只需定出两个控制截面的纵坐标并用直线连接就可绘出。

当 x=0 时，F_{yA}=1。

当 x=l 时，F_{yA}=0。

作图时规定反力向上为正，把正的纵坐标画在基线的上面，负的纵坐标画在基线的下面，并标上正负号。如图 8.3(b)所示。

同理对 A 点取矩得：

$$\sum M_A = F_{yB}l - F_Px = 0$$

$$F_{yB} = F_P\frac{x}{l} = \frac{x}{l} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{8-2}$$

式(8-2)为 F_{yB} 的影响线方程

当 x=0 时，F_{yB}=0。

当 x=l 时，F_{yB}=1。

据此绘出 F_{yB} 的影响线如图 8.3(c)所示。

由式(8-1)、式(8-2)可知，反力影响线纵坐标是无量纲的量。当利用影响线计算荷载所产生的以上量值时，只须将实际荷载数值与相应影响线的纵坐标相乘并采用实际荷载的单位即可。

8.2.2　弯矩影响线

作弯矩的影响线时，应首先指定截面的位置，即明确要做哪一截面的影响线。现拟作简支梁截面 C(它距两端的距离分别为 a 和 b)的弯矩影响线。当荷载 F_P=1 分别在截面以左和截面以右时，截面 C 的弯矩具有不同的表达式，应予分别考虑。

当 F_P=1 在截面 C 以左移动时，为计算简便，取 CB 左段为脱离体，由力矩平衡方程可得：

$$M_C = F_{yB} b = \frac{x}{l} b \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{8-3}$$

上式表明 M_C 的影响线在截面 C 以左为一直线。

当 x=0 时，M_C=0。

当 x=a 时，$M_C = \dfrac{ab}{l}$。

用直线连接两控制截面的纵坐标，即得 AC 段 M_C 的影响线。

当 F_P=1 在截面 C 以右移动时，式(8-3)已不适用，需另行考虑，为计算简便，取 AC 段为脱离体，利用力矩平衡方程式可得：

$$M_C = F_{yA} a = \frac{l-x}{l} a \quad (a \leqslant x \leqslant l) \tag{8-4}$$

显然，M_C 的影响线在截面 C 以右也是一直线。

当 x=a 时，$M_C = \dfrac{ab}{l}$。

当 x=l 时，M_C=0。

用直线连接两个纵坐标，即得 CB 段 M_C 的影响线。

分析式(8-3)、式(8-4)可以看出，M_C 影响线左段为 F_{yB} 影响线的纵坐标扩大 b 倍，而右段为 F_{yA} 的影响线纵坐标扩大 a 倍。因此 M_C 的影响线可以利用 F_{yA} 和 F_{yB} 的影响线绘出，如图 8.3(d)所示。在画弯矩影响线时，规定正的纵坐标画在基线上面，负的纵坐标画在基线下面，并标明正负号。弯矩影响线纵坐标的量纲应为长度的量纲。

8.2.3　剪力影响线

作剪力影响线也需要指定截面的位置，并分别考虑荷载 F_P=1 在截面以左和以右移动的情况，剪力的正负号规定与材料力学相同，即使脱离体有顺时针转动趋势的剪力为正，反之为负。

现拟作简支梁截面 C 的剪力影响线。

当 F_P=1 在截面 C 以左移动时，取 CB 段为脱离体，列平衡方程，得

$$F_{QC} = -F_{yB} = -\frac{x}{l} \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{8-5}$$

当 F_P=1 在截面 C 以右移动时，取 AC 段为脱离体，列平衡方程，得

$$F_{QC} = F_{yA} = \frac{l-x}{l} \quad (a \leqslant x \leqslant l) \tag{8-6}$$

由以上两式可知，在截面以左，F_{QC} 的影响线与 F_{yB} 的影响线相同，但正负号相反，

相当于把 F_{yB} 影响线翻过来画在基线下面，接近截面 C 的纵坐标值为 $\frac{a}{l}$；而在截面以右，F_{QC} 影响线与 F_{yA} 的影响线完全相同，接近截面 C 的纵坐标值为 $\frac{b}{l}$，两直线互相平行。剪力影响线的纵坐标和反力影响线的纵坐标一样也是无量纲的量。F_{QC} 的影响线如图 8.3(e)所示。

必须指出影响线与内力图是截然不同的，应注意它们之间的区别。

【例 8-1】 试如图 8.4(a)所示双伸臂梁的反力影响线，以及指定截面 C 和 D 的弯矩、剪力影响线。

解：(1) 作反力 F_{yA}、F_{yB} 影响线。

以 A 点为坐标原点，坐标 x 以向右为正，利用整体平衡条件可分别求得反力 F_{yA}、F_{yB} 的影响线方程为

$$F_{yA}=\frac{l-x}{l}\quad(-c\leqslant x\leqslant l+d)$$

$$F_{yB}=\frac{x}{l}\quad(-c\leqslant x\leqslant l+d)$$

根据以上两式，绘出 F_{yA}、F_{yB} 的影响线。

2) 作弯矩 M_C 和 F_{QC} 的影响线。

当 F_P=1 在截面 C 以左时，求得 M_C 的影响线方程为

$$M_C=F_{yB}b=\frac{x}{l}b\quad(-c\leqslant x\leqslant a)$$

同理，当 F_P=1 在截面 C 以右时，则求得

$$M_C=F_{yA}a=\frac{l-x}{l}a\quad(a\leqslant x\leqslant l+d)$$

由以上影响线方程绘出 M_C 的影响线，如图 8.4(d)所示。

当 F_P=1 在截面 C 以左时，求得 F_{QC} 的影响线方程为

$$F_{QC}=-F_{yB}=-\frac{x}{l}\quad(-c\leqslant x\leqslant a)$$

同理，当 F_P=1 在截面 C 以右时，则求得

$$F_{QC}=F_{yA}=\frac{l-x}{l}\quad(a\leqslant x\leqslant l+d)$$

由以上影响线方程绘出 F_{QC} 的影响线，如图 8.4(e)所示。

3) 作弯矩 M_D 和 F_{QD} 的影响线。

当 F_P=1 位于截面 D 以左时，截面 D 不产生弯矩和剪力，所以 M_D 和 F_{QD} 的影响线纵标在 D 以左均为 0。为计算方便，取 D 点为坐标原点，以 x_1 表示 F_P=1 至原点的距离，如图 8.4(a)所示，取截面 D 以右为脱离体，根据平衡条件，有

$$M_D=-x\quad(0\leqslant x_1\leqslant f)$$

$$F_{QD}=1\quad(0\leqslant x_1\leqslant f)$$

绘出 M_D 和 F_{QD} 的影响线，如图 8.4(f)及图 8.4(g)所示。

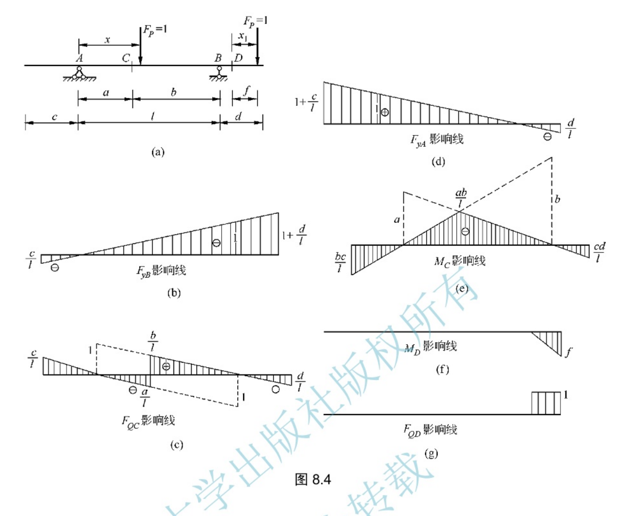


图 8.4

8.3　结点荷载作用下梁的影响线

在上一节介绍了荷载直接作用于梁上时影响线的做法，实际上不少结构常受到间接荷载(也称为节点荷载)的作用。例如桥梁或房屋结构中的某些主梁，是通过一些次梁(纵梁和横梁)将荷载传到主梁上。主梁上这些荷载传递点即主梁的节点。从移动荷载来说，不论荷载在次梁上的那些位置，其作用都要通过这些固定节点传递到主梁上，如图 8.5(a)所示。*AB* 为一简支主梁，横梁支在主梁的 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 点处，这些点就是节点。横梁上面为 4 根简支纵梁。F_P=1 在 *C*、*D* 之间的纵梁上移动时，主梁即在节点 *C*、*D* 处受到节点荷载的作用。

我们以主梁上截面 M_K 影响线为例，当 F_P=1 作用于节点 *C*、*D* 之间的纵梁上时，主梁 *AB* 在 *C*、*D* 两点所承受的节点荷载分别为 $\frac{d-x}{d}$ 和 $\frac{x}{d}$，如图 8.5(b)所示。根据影响线的定义并利用叠加原理可知，在两个节点荷载共同作用下，M_K 的影响线纵坐标的计算式为

$$M_K = \frac{d-x}{d} y_C + \frac{x}{d} y_D \tag{8-7}$$

式中 y_C 和 y_D 分别为直接荷载作用下 M_K 影响线在 *C*、*D* 两点的纵坐标，如图 8.5(c)所示，这是 *x* 的一次方程式。因此，M_K 影响线在 *C*、*D* 之间为一直线。将 y_C 和 y_D 的顶点用一条直线相连，从此比例关系可知，图 8.5(c)中，F_P=1 下方的纵坐标 *y* 就等于上式所示 M_K 的

影响线的纵坐标。因此，在节点荷载作用下，M_K的影响线即如图 8.5(c)的实线所示。

以上讨论同样适用于主梁其他量值的影响线。这样，我们将节点荷载作用下某一量值影响线的做法归纳如下。

(1) 先绘出直接荷载作用下该量值的影响线。

(2) 从各结点引竖线与直接荷载作用下的影响线相交，然后根据所得交点在每一纵梁范围内以直线相连，即得该量值在节点荷载作用下的影响线。

依照上述作法，可得主梁上截面 K 的剪力 F_{QK} 影响线，如图 8.5(d)实线所示。可以看出，不论截面 K 位于 C、D 两点之间的任何一处，F_{QK} 影响线都一样。此外，由上述作法可以推知：主梁反力 F_{yA}、F_{yB} 的影响线和结点处截面的内力(M、F_Q)影响线与直接荷载作用时完全相同。

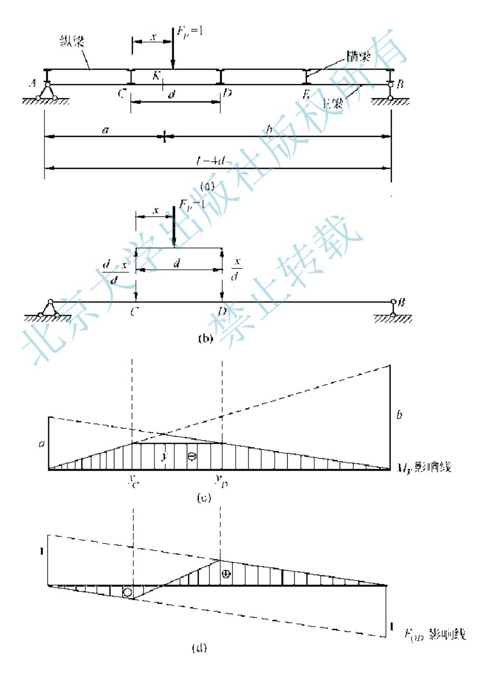


图 8.5

8.4　机动法作静定梁影响线

8.4.1　静定梁影响线

机动法是绘制影响线的另一种方法，它的理论依据是虚功原理。根据理论力学中的刚体系虚功原理，刚体系在力系作用下处于平衡时，在任何可能的无限小的位移中，力系所做功的总和为零。这种任何可能的无限小位移称为虚位移，而力系在虚位移上所做的功称为虚功。应用机动法可以将绘制静定结构内力和反力影响线的静力学问题转化为求作位移图的几何学问题，绘制过程十分快捷。

1. 反力影响线

以下仍以伸臂梁为例，介绍如何按照机动法绘制反力影响线。设要绘制如图 8.6(a)所示外伸梁支座 F_{yA} 的影响线。可先将与 F_{yA} 相应的支座连杆撤出，代之以未知反力 X。此时，体系仍处于平衡状态，但原先的静定结构已转化为具有一个自由度的机构。使上述机构顺着 X 的正方向发生虚位移，如图 8.6(b)所示，以 δ_X 和 δ_P 分别表示梁 A 点处和移动荷载 F_P=1 作用点处的虚位移。δ_X 取与所求量值 X 方向一致为正；δ_P 取与单位荷载 $F_P=1$ 方向一致为正，此时可列出虚功方程

$$X\delta_X + F_P\delta_P = 0$$

由此可得

$$X = -\frac{\delta_P}{\delta_X} \tag{8-8}$$

当单位荷载 F_P=1 移动时，δ_P 的值是变化的，其变化规律如图 8.6(b)的机构虚位移图所示。若使 $\delta_X = 1$，则有

$$X = -\delta_P \tag{8-9}$$

式(8-9)表明，只需将 $\delta_X = 1$ 时虚位移图中的 δ_P 改变符号，即取方向向上为正，就可得到所求量值 X 的影响线，于是可作出 $X(F_{yA})$的影响线，如图 8.6(c)所示。

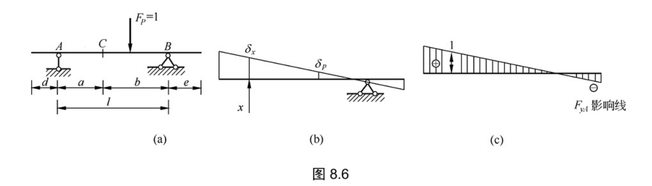


图 8.6

2. 弯矩影响线

下面讨论用机动法作如图 8.6(a)所示伸臂梁 M_C 的影响线，首先应将与 M_C 相应的联系撤出，即在 C 截面插入一个铰，并以一对大小等于 X 的力矩代替原有联系中的作用，如图 8.7(a)所示。然后使上述机构顺着 X 的方向发生一虚位移，此时可列出虚功方程：

$$1\times\delta_P + X\times(\alpha+\beta)=0$$

得

$$X=-\frac{\delta_P}{\alpha+\beta} \tag{8-10}$$

式中$\alpha+\beta$为铰C出杆件的折角，即与X相应的广义位移。若使$\alpha+\beta=1$，并注意δ_P的机构虚位移项将改变符号，即可得到M_C的影响线，如图8.7(b)所示。影响线图中的纵坐标可按前述几何学原理求得。

$$X=-\delta_P \tag{8-11}$$

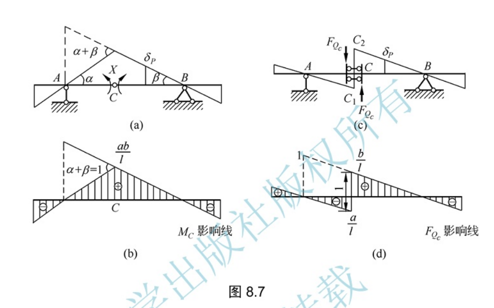


图 8.7

3. **剪力影响线**

最后用机动法绘制伸臂梁截面C剪力F_{QC}的影响线，同理在C截面撤出与F_{QC}相应的联系，即在C处插入一个滑动铰，并以X代替原有联系的作用。

然后使上述机构顺着F_{QC}的正方向发生虚位移，如图8.7(c)所示。由于组成滑动铰的两根等长链杆和两侧的刚片在机构运动中必定保持为平行四边形，因此在虚位移图中AC_1与C_2B必定是平行的。与上述虚位移相应的虚功方程为

$$1\times\delta_P + X\times(CC_1+CC_2)=0$$

$$X=-\frac{\delta_P}{CC_1+CC_2} \tag{8-12}$$

式中CC_1+CC_2为C点两侧截面的竖向相对线位移，即与F_{QC}相应的广义位移。若使$CC_1+CC_2=1$，并按与前同样的理由将机构虚位移图改变符号，即可得到F_{QC}的影响线如图8.7(d)所示。图中影响线的纵坐标同样可以按照几何学原理求得。

$$X=-\delta_P \tag{8-13}$$

综上所述，用机动法作静定结构内力和反力的影响线时，首先需要撤除与所求内力或反力的量值“S”相应的约束，并用X代替所求量值。此时原结构变为具有一个自由度的机构，并且仍处于平衡状态。然后，使该机构顺着X的正方向发生单位虚位移，在此过程中只有X和单位移动荷载作了虚功，单位移动荷载所作的虚功就等于其作用点沿$F_P=1$方向的位移值δ_P；而X所作的虚功就等于X本身。于是，由虚功方程可知，X的影响线就

是改变符号后的 δ_P 图，即相应机构中承载杆(移动荷载 F_P=1 所作用的杆)的虚位移图。这样，绘制 X 影响线的静力学问题就转化为求作相应机构位移图的几何学问题。

【例 8-2】 使用机动法作如图 8.8(a)所示多跨静定梁 F_{yB}、M_F、F_{QF} 的影响线。

解：(1) F_{yB} 的影响线。

撤掉支座 B，代以未知反力 X，令体系沿 X 的正方向发生单位位移，得到相应的虚位移图，如图 8.9(b)所示，用实线画轮廓，并标明正负号，按比例关系求出各控制点的纵标，即得到 F_{yB} 的影响线如图 8.8(c)所示。

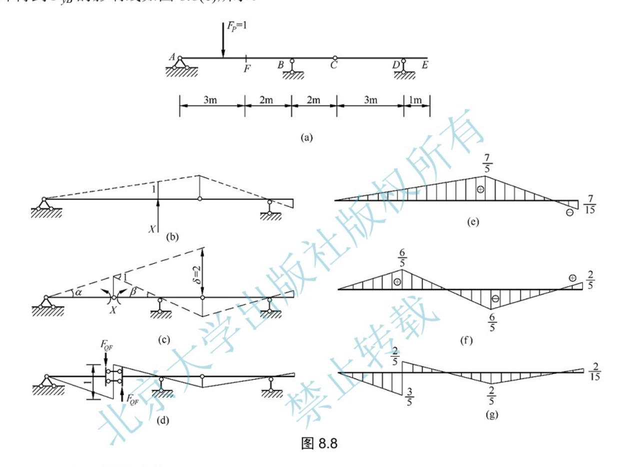


图 8.8

(2) 画 M_F 的影响线。

撤掉截面 F 处的约束，在 F 处插入一个铰，并以未知反力 X(力偶)代替原有联系中的作用，使铰处沿 X 正方向发生虚位移，如图 8.8(d)所示。$\alpha+\beta=1$时，$\delta=2$，以实线画出轮廓线，标明正负号，按比例关系求出各控制点的纵坐标，即得 M_F 的影响线，如图 8.8(e)所示。

(3) 撤掉截面 F 处的约束，在 F 处插入一个滑动铰，并以未知反力 X(剪力)代替原有联系中的作用，使滑动铰左右截面产生的相对位移等于 1。由虚位移图以实线画出轮廓线，标明正负号，按比例关系求出各控制点的纵坐标，即得 F_{QF} 的影响线，如图 8.8(g)所示。

8.4.2 桁架内力的影响线

桁架支座反力的影响线与梁相同，本节主要介绍桁架杆件内力影响线的绘制方法。由于作用在桁架上的荷载一般也是通过弦杆和腹杆(纵梁和横梁)传递到桁架的结点上的，所以前面所讨论的在间接荷载作用下相邻结点间的影响线为直线的结论，在这里仍然适用。

事实上，作桁架杆件内力的影响线跟作间接荷载作用下梁的影响线异曲同工。桁架某杆件内力的影响线是荷载严 F_P=1 沿弦杆移动时，表示该杆内力变化规律的图线。其影响线方程需要通过计算单位移动荷载作用下该杆的内力来求得。因此，静止荷载作用时求桁架内力的方法——结点法和截面法依然适用。

如图 8.9(a)所示结构的影响线。

(1)　　　作 N_{24} 和 N_{35} 的影响线，作截面Ⅰ-Ⅰ，以结点 3 为矩心，利用平衡方程式 $\sum M_3 = 0$ 求 N_{24}。

当 F_P=1 在结点 1 以左时，取截面Ⅰ-Ⅰ以右部分为脱离体，得

$$F_{yB} \times 4d + N_{24} \times h = 0 \qquad N_{24} = -\frac{4d}{h} F_{yB} \tag{8-14}$$

当 F_P=1 在结点 3 以右时，取截面以左为脱离体，得

$$F_{yA} \times 2d + N_{24} \times h = 0 \qquad N_{24} = -\frac{2d}{h} F_{yA} \tag{8-15}$$

由式(8-14)，利用 F_{yB} 的影响线将纵坐标乘以 $\frac{4d}{h}$，画在基线下面，取结点 1 以左段；由式(8-15)，将 F_{yA} 影响线纵坐标乘以 $\frac{2d}{h}$，画在基线下面，取结点 3 以右段。在结点 1、3 之间，影响线为连接点 1、3 处纵坐标的直线，恰遇左段延长线重合，因此，N_{24} 的影响线为三角形。

将式(8-14)、(8-15)合并为一式

$$N_{24} = -\frac{M_3^0}{h} \tag{8-16}$$

式中 M_3^0 为相应图 8.9(c)所示简支梁结点 3 的弯矩，故三角形顶点的纵标为

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{ab}{l}\right) = -\frac{2d}{h} \times \frac{4d}{6d} = -\frac{4d}{3h}$$

绘出 N_{24} 的影响线，如图 8.9(c)所示。

同理，做截面Ⅱ-Ⅱ，以结点 4 为矩心，利用平衡方程 $\sum M_4 = 0$，得

$$N_{35} = \frac{M_3^0}{h} \tag{8-17}$$

绘出 N_{35} 的影响线，如图 8.9(d)所示。

(2) 作 N_{23} 和 N_{34} 的影响线。

欲作斜杆 N_{23} 的影响线，可先作 V_{23}(23 斜杆 Y 方向的分量)的影响线，然后将其纵坐标乘以比例系数 $\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h}$ 而得到。

利用截面Ⅰ-Ⅰ，当 F_P=1 在结点 1 以左移动时，取截面以右为脱离体，由 $\sum F_y = 0$，得

$$V_{23} = -F_{yB} \tag{8-18}$$

当 F_P=1 在结点 3 以右移动时，取截面以左为脱离体，由 $\sum F_y = 0$，得

$$V_{23} = F_{yA} \tag{8-19}$$

当 F_P=1 在结点 1 和 3 之间移动时，影响线为连接结点 1、3 处纵坐标的直线。综上绘出 V_{23} 的影响线，如图 8.9(e)所示。

可将式(8-18)、(8-19)合并为一式。

$$V_{23}=F_{Q_{13}^0}$$

式中 $F_{Q_{13}^0}$ 为相应简支梁在结点 1、3 之间的剪力。

同理，N_{34} 的影响线方程可利用截面Ⅱ-Ⅱ，由 $\sum F_y=0$ 求出。

$$N_{34}=-F_{Q_{35}^0}$$

式中 $F_{Q_{35}^0}$ 为相应简支梁在结点 3、5 之间的剪力。绘出 N_{34} 的影响线，如图 8.9(f)所示。

(3) 作 N_{56} 的影响线。

当 F_P=1 沿下弦移动时(称为下承桁架)，由结点 6 的平衡条件可知，N_{56} 始终为零杆。此时 N_{56} 的影响线与基线重合。

若 F_P=1 沿上弦移动(称为上承桁架)，则当荷载位于结点 6 时，$N_{56}=-1$；当 F_P=1 位于其他结点时，N_{56}=0，因此，N_{56} 的影响线为一个三角形，如图 8.9(g)所示。

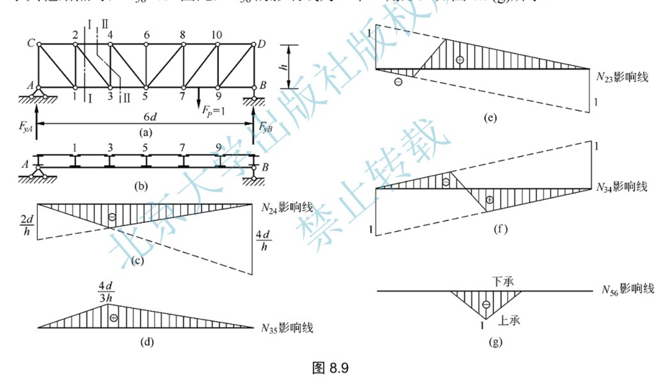


图 8.9

8.5　利用影响线计算量值

影响线描述了单位移动荷载作用下某一量值(影响量)的变化规律，当有移动荷载组或是由可任意间断布置的分布荷载作用时，上述量值可以利用影响线根据叠加原理求得。

设结构上有一组集中荷载 F_{P1}，F_{P2}，…，F_{Pn} 作用，如图 8.10(a)所示，量值 S 的影响线如图 8.10(b)所示，其在荷载作用位置的纵坐标分别为 y_1，y_2，…，y_n。此时，集中荷载组所产生的影响量 S 应等于各荷载产生影响量的代数和，即有

$$S=\sum_{i=1}^{n}F_{Pi}y_i \tag{8-20}$$

若是有如图 8.11(a)所示的分布荷载作用，根据未分原理，影响量 S 可以表达为

$$S=\int_A^B q(x)y\mathrm{d}x \tag{8-21}$$

当为均布荷载即 $q(x)=q_0$ 时，则上式成为

$$S=q\int_A^B y\mathrm{d}x=qA_0 \tag{8-22}$$

式中 A_0 表示 S 影响线在均布荷载范围内面积的代数和，即图 8.11(b)中的阴影面积 A_1-A_2。

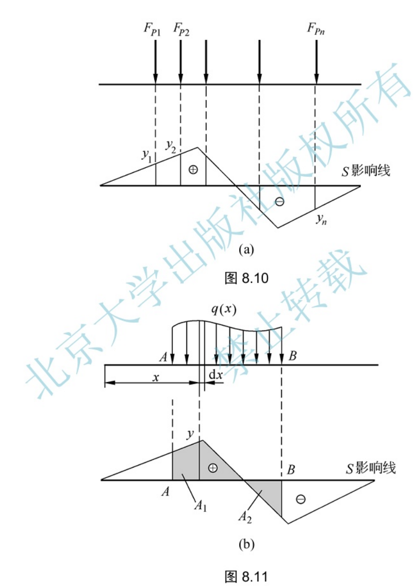


图 8.10

图 8.11

【例 8-3】　试利用影响线求如图 8.12(a)所示剪支梁在图示荷载作用下 M_C 和 F_{QC} 的值。

解：先分别作出 M_C 和 F_{QC} 的影响线并求出有关的影响线纵坐标值，如图 8.12 所示。

根据叠加原理，可算得

$$M_C = 20\times10^3\times0.96+10\times10^3\times\left[\frac{1}{2}\times(1.44+0.72)\times1.2+\frac{1}{2}\times(1.44+0.48)\times2.4\right]$$
$$=19.2\times10^3+36\times10^3=55.2\times10^3\,\mathrm{N\cdot m}$$
$$=55.2\,\mathrm{kN\cdot m}$$
$$F_{QC}=20\times10^3\times0.4+10\times10^3\times\left[\frac{1}{2}\times(0.6+0.2)\times2.4-\frac{1}{2}\times(0.2+0.4)\times1.2\right]$$
$$=8\times10^3+6\times10^3=14\times10^3\,\mathrm{N}=14\,\mathrm{kN}$$

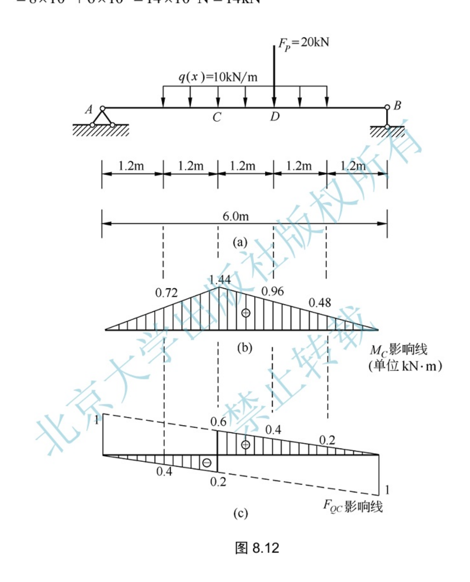


图 8.12

8.6　最不利荷载位置

在结构设计中，常常需要计算出在移动荷载作用下，结构某些最大量值(包括最大正量值 $S_{\max}$ 和最大负量值 $S_{\min}$)以及产生这些最大量值的最不利荷载位置。

1. 任意布置的均布荷载

在设计中，一般将楼面活载，如人群、施工荷载和一些可移动的设备等简化为可以任意间断布置的均布荷载来考虑。此时，使某一量值 S 达到最大值的最不利活载分布可以利用影响线来确定。由式(8-22)可知，当均布活载满布相应影响线的正号区时，S 即取得最

大值；反之，当均布活载满布相应影响线的负号区时，S取得最大负值。例如，对于如图8.12(a)所示的多跨静定梁，M_D的影响线如图8.12(b)所示，欲求在均布活载作用下截面D的最大正弯矩和最大负弯矩，则最不利活载的布置应分别如图8.12(c)所示。确定了均布活载的最不利布置后，便可应用静力学方法或是直接利用式(8-22)求得相应的最不利值。



2. 系列移动集中荷载组

借助于某一量值 S 的影响线，可以直接确定单个集中荷载使 S 达到最大正值或最大负值时的作用位置。只需将该集中荷载置于影响线正、负纵坐标值最大处即可。对于系列集中荷载组，例如汽车、平板拖车和火车等，移动荷载组作用的情况，则应先分析什么样的荷载作用位置有可能使量值 S 取得极值，然后再从这些位置中确定最不利荷载位置。

图 8.13(a)表示一组间距不变的移动荷载；图 8.13(b)表示某一量值 S 为一个三角形的影响线，影响线两直线段的倾角分别记为α_1、α_2，均以逆时针方向为正。其中

$$S = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 + \cdots + F_{Pi}y_i + \cdots + F_{Pn}y_n$$

当荷载组移动一个微小距离 Δx 时，S 的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta S &= F_{P1}\Delta y_1 + F_{P2}\Delta y_2 + \cdots + F_{Pi}\Delta y_i + \cdots + F_{Pn}\Delta y_n \\ &= (F_{P1} + F_{P2} + \cdots + F_{Pn})\frac{h}{a}\Delta x - (F_{Pi+1} + \cdots + F_{Pn})\frac{h}{b}\Delta x \end{aligned} \tag{8-23}$$

式中 $\dfrac{h}{a} = \tan\alpha_1$ 和 $-\dfrac{h}{b} = \tan\alpha_2$ 均为常数，分别为影响线的左直线和右直线的斜率；而括号内数值分别代表作用于左直线和右直线的部位的移动荷载。

量值 S 取得极值的条件是当荷载组作微小移动时 ΔS 发生变号。由式(8-23)可以看出，倘若在荷载移动过程中作用于左直线和右直线部位的荷载数量保持不变，则式(8-23)括号内保持为常数，这样就不可能发生 ΔS 变号的情况。或者说，要使 ΔS 变号就必须有一个集中荷载越过影响线的顶点。于是便得到一条重要的结论：在荷载总数不变时，量值 S 取得极值的必要条件是有一个集中荷载恰好作用于影响线的顶点。

如果在荷载应动过程中 ΔS 由正值转为负值，则量值 S 取得一个集大值。假设 S 取得极大值发生在某集中荷载 F_{Pi} 作用于影响线顶点时，则该集中荷载便称为量值 S 的一个临界荷载，记为 $F_{P_{cr}}$；其对应的荷载位置就称为临界位置。若以 $\sum P_P^R$ 和 $\sum P_P^L$ 分别记录 $F_{P_{cr}}$ 以左和以右的荷载之和，则由式(8-23)可得三角形影响线时，使量值 S 取得极大值的临界荷载判别式为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum F_P^L + F_{P_{cr}}}{a} &> \frac{\sum F_P^R}{b} \\ \frac{\sum F_P^L}{a} &< \frac{\sum F_P^R + F_{P_{cr}}}{b} \end{aligned}\right\} \tag{8-24}$$

上式表明：临界位置的特点是有一集中荷载 $F_{P_{cr}}$ 作用于影响线的顶点，将 $F_{P_{cr}}$ 记入哪一侧(左侧或右侧)，则哪一侧荷载的平均集度就大些。

利用式(8-24)虽可确定临界荷载，但有时临界荷载可能不止一个，此时可将相应的极值分别算出，其中最大的极值就是量值 S 的最不利值，而相应的荷载位置即为移动荷载组的最不利荷载位置。一般地说，S 的最不利值是在数值较大而又比较密集的集中荷载作用于影响线的顶点时发生的。因此，在按式(8-24)试算之前可先通过直观判断排除部分荷载，从而减轻计算工作。

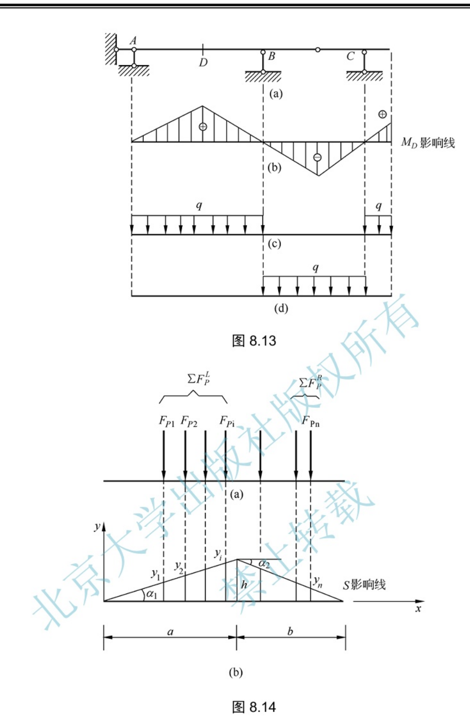


图 8.13

图 8.14

有关确定最不利荷载位置的问题还需要明确以下几点。

(1)　若是均布移动荷载作用的情况，则量值 S 是荷载作用位置参数 x 的二次函数，其最不利荷载位置可按一般求极值的方法，由 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0$ 的条件确定。

(2)　若移动荷载组中同时包含有集中荷载和均布荷载，则对于集中荷载通过影响线的顶点时，临界荷载应按式(8-24)来判断；而对于均布荷载则可通过上一条求极值的方法来进行确定。

(3)　对于量值 S 影响线有多个极值点的情况，量值 S 取得极值的条件是有一个集中荷载恰好作用于影响线的某一个顶点。对于此种情况也可通过式(8-24)分别对各种可能出现的情况进行试算，从而确定 S 的最不利值和移动荷载组的最不利荷载位置。在计算量比较

大的情况下可以通过相关的计算机商用软件进行计算。

(4)　无论移动荷载的移动方向如何(从左向右运动或从右向左运动)，所得临界荷载的判别式是相同的，所求得的最不利荷载位置以及量值 S 的最不利值也是相同的。

【例 8-4】　求如图 8.15(a)所示移动荷载作用下 B 支座的最大压力值。

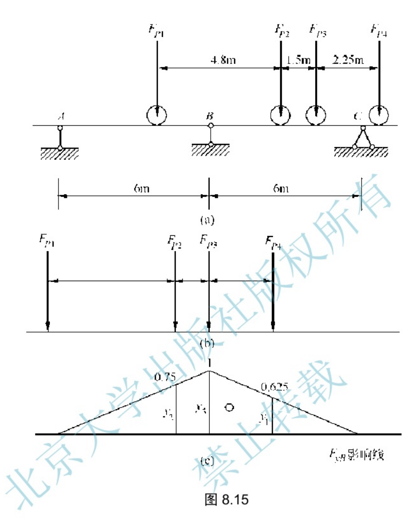


图 8.15

已知：$F_{P1}=F_{P2}=295\text{kN}$，$F_{P3}=F_{P4}=435\text{kN}$。

解：做 F_{By} 的影响线如图 8.15(b)所示，利用式(8-24)判断临界荷载。当 F_{P2} 作用于 B 点时，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{295+295}{6}&<\frac{435\times2}{6}\\ \frac{295}{6}&>\frac{295+435\times2}{6}\end{aligned}\right\}$$

故 F_{P2} 不是临界荷载。当 F_{P3} 作用于 B 点时，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{295+435}{6}&>\frac{435}{6}\\ \frac{295}{6}&<\frac{435+435}{6}\end{aligned}\right\}$$

故 F_{P3} 是临界荷载。经直观判断，F_{P1} 和 F_{P4} 显然不可能是临界荷载。

下面计算 F_{Py} 的最大值$(F_{Py})_{\max}$，$y_2=0.75$，$y_1=1$，$y_4=0.625$

$$(F_{Py})_{\max} = \sum F_{Pi} y_i$$
$$= 295\times 0.75 + 435\times 1 + 435\times 0.625$$
$$=298.125\text{kN}$$

8.7　简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩

上一节中介绍了确定最不利荷载位置和求某量值最大值的方法，依此可以求出梁中任一指定截面的内力最大值。但是，在结构设计中只算出某个指定截面的内力最大值是不够的，还需要知道全梁各个截面的内力最大值。连接各截面内力最大值的曲线称为内力包络图。简支梁的内力包络图包括弯矩包络图和剪力包络图，能分别表示梁中各截面弯矩和剪力变化的极限范围。

如图 8.16(a)所示为一吊车梁，承受吊车作用，吊车轮压如图 8.16(b)所示。不计吊车梁自重，现绘制其弯矩包络图。首先将梁分成若干等份，然后利用影响线计算每一分点截面的最大弯矩值，并在图上绘出纵坐标，最后将各纵坐标顶点连成一条曲线，就得到该梁的弯矩包络图，如图 8.16(c)所示。同理，可利用剪力影响线求出各截面的最大剪力和最小剪力，将最大和最小剪力的纵标顶点分别用曲线连接，就得到该梁的剪力包络图，如图 8.16(d)所示。

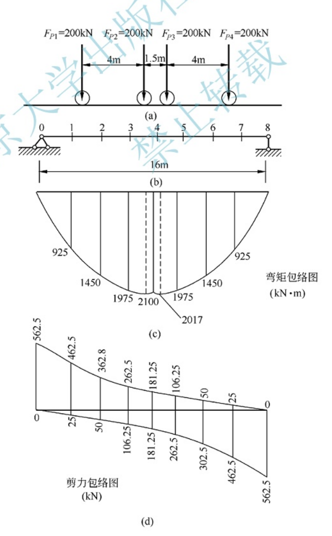
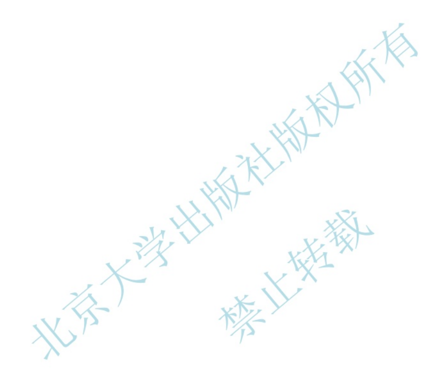


图 8.16



梁内所有截面的最大弯矩中的最大值称为绝对最大弯矩。它代表在确定的移动荷载作用下，全梁可能出现的弯矩最大值。由于事先不能确定绝对最大弯矩所在截面的位置，因此不能按照前述求最不利荷载位置的方法来计算。我们从另外的途径进行分析。

在上例中我们可以清楚地看到，当一组移动荷载作用在简支梁上时，其最大弯矩并非出现在简支梁的中点。下面我们来求一下简支梁的绝对最大弯矩。所谓简支梁的绝对最大弯矩，是指简支梁的任意截面上可能出现的最大弯矩。实际上，它应该就是简支梁弯矩包络图中的最大纵坐标值。从图 8.17 中可见，它通常是发生在跨中附近。寻找并确定绝对最大弯矩这一问题的基本特点是：截面的位置和荷载位置都是未知的，即这两者都是变化的。

从上一节的分析可知，当内力影响线为三角形时，其最不利荷载位置必定发生在移动荷载组中的一个临界荷载 P_{cr} 恰好位于影响线的顶点(即截面所在点)时。由此便可推理：绝对最大弯矩必定发生在某一临界荷载之下。根据这一推理，就可以通过试算结合解析的方法确定简支梁的绝对最大弯矩。即先通过判断确定哪几个荷载之下可能产生绝对最大弯矩；再根据任一荷载 F_{Pi} 下截面弯矩随荷载移动而变化的规律，分别求出上述临界荷载之下的截面最大弯矩。

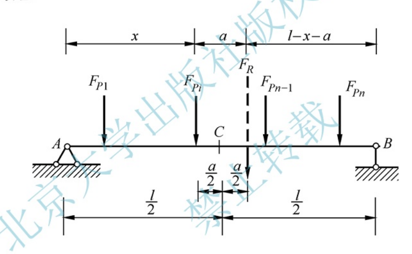


图 8.17

设简支梁上作用有移动荷载如图 8.17 所示。用 x 表示某一指定荷载 F_{Pi} 至 A 支座的距离；a 表示该指定荷载 F_{Pi} 至梁上荷载合力 F_R 的距离；M_i 表示 F_{Pi} 左边的荷载对 F_{Pi} 作用点的力矩，它是一个与 x 无关的常数。此时，F_{Pi} 截面的弯矩 M_x 可表示为

$$M_x = F_{yA}x - M_i = \frac{F_R}{l}(l - x - a)x - M_i$$

M_x 取得极值的条件为

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = \frac{F_R}{l}(l - 2x - a) = 0$$

得

$$x = \frac{l - a}{2} \tag{8-25}$$

或

$$x = l - x - a \tag{8-26}$$

式 8-25 表明：当 F_{Pi} 与合力 F_R 恰好位于梁的中点两侧的对称位置时，F_{Pi} 所在截面的弯矩达到最大值

$$M_{\max}=\frac{F_R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_i \tag{8-27}$$

根据上述结论，就可以将需作试算的各个荷载之下的最大弯矩分别求出，将它们加以比较，便求得绝对最大弯矩。因为简支梁在吊车移动荷载作用下的绝对最大弯矩通常发生在梁的跨中附近，所以一般情况下使梁跨中发生最大弯矩的临界荷载，也就是发生绝对最大弯矩的临界荷载。

应当注意的是：F_R 是梁上实有荷载的合力。在移动 F_{Pi} 时梁上实有荷载的个数可能有增有减，这时就需要重新计算合力 F_R 的数值和位置。

【例 8-5】 试求如图 8.18 所示吊车梁的绝对最大弯矩。其中 $F_{P1}=F_{P2}=F_{P3}=F_{P4}=200\text{kN}$。

解：经分析不难看出，在四个荷载中，F_{P2}、F_{P3} 为可能使跨中截面 C 产生最大弯矩的临界荷载，因此，可以认为绝对最大弯矩将发生在临界荷载 F_{P2} 或 F_{P3} 所在截面。利用对称性，只需计算其中一个荷载。

令 F_{P2} 为临界荷载进行计算。如图 8.18 所示

$$F_R=200\times4=800$$

$$a=\frac{1.5}{2}=0.75$$

$$M_K=4\times200=800\text{kN}\cdot\text{m}$$

因此，绝对最大弯矩为

$$\begin{aligned}M_{\max}&=\frac{F_R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_K\\&=\frac{800}{16}\times\left(\frac{16}{2}-\frac{0.75}{2}\right)^2-800\\&=2107.03\text{kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

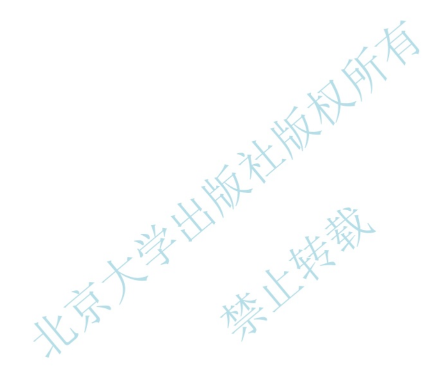


图 8.18

8.8　超静定结构影响线的概念

前面几节讨论了静定梁影响线的做法和利用影响线确定最不利荷载位置等问题，对于超静定梁，欲确定其在移动荷载作用下对某量值 S 的最不利荷载位置，同样需要借助于影响线。

从前面的讨论可知，静定梁的反力和内力影响线都是由直线段组成，只要求出每段直线的两个纵坐标，影响线便可绘出，而且计算影响线的纵坐标也比较简单。但超静定梁的反力和内力影响线不是直线，其纵坐标的计算和影响线的绘制要繁杂得多。下面我们就以某单跨超静定梁为例，绘制其支座 A 的弯矩 M_A 的影响线。

如图 8.19(a)所示的单跨超静定梁，可令 F_P=1 至 A 支座的距离为 x，将 A 支座的弯矩约束去掉，代之以未知反力 M_A。得到如图 8.19(b)所示的基本体系。考虑到单位荷载作用，力法方程可写为：

$$\delta_{11}M_A + \Delta_{1P} = 0$$

式中的系数和自由项可分别根据 $\bar{M}_1$ 图(图 8.19(c))和 M_P 图(图 8.19(d))由图乘法求得，为：

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}，\quad \Delta_{1P} = \frac{(2l-x)(l-x)xl}{2l^2 3EI}$$

据此可求得 A 点弯矩的影响线方程为：

$$M_A = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{(2l-x)(l-x)x}{2l^2}$$

并可绘出 A 点弯矩的影响线如图 8.19 (e)所示。

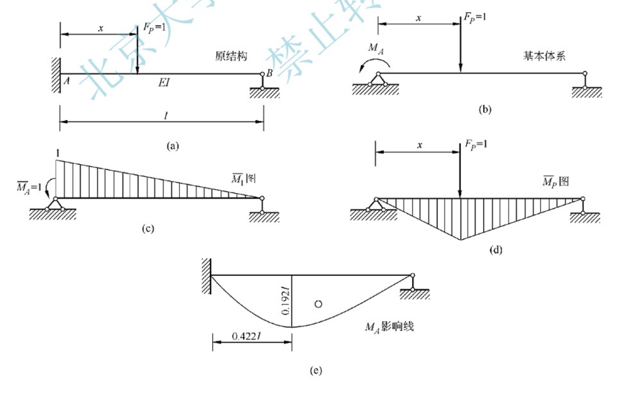


图 8.19

从上例可以看到 M_A 的影响线是荷载位置 x 的 3 次函数，使用此法也可以绘制出该梁的其它反力与内力影响线，进而可知，此梁的其他反力和内力影响线都是曲线。对于超静定的连续梁来说，这一结论同样适用。

由上述可知，超静定梁的影响线都为曲线。用静力法绘制个量值的影响线时，必须解算超静定结构，求得影响线方程，依次求得各等分点处的纵坐标，再连成曲线。显然，这样绘制影响线将是非常复杂的。

不过，在房屋建筑工程中，通常所遇到的连续梁承受的活载多为可动均布荷载(如楼面上的施工荷载、人群和可移动的设备等)，这时只需要知道影响线的轮廓就可确定其最不利荷载位置，而不必求出影响线纵坐标的具体数值。而由前述可知，用机动法可以不经具体计算就能绘出影响线的轮廓线，这对于连续梁的设计计算将带来很大的方便。下面介绍用机动法作连续梁影响线的方法。

设有一 n 次超静定连续梁如图 8.20(a)所示，欲绘制其上某指定量值 X_K(例如 M_K)的影响线，可先去掉与 X_K 相应的约束，并以 X_K 替代其作用，如图 8.20(b)所示。求 X_K 时，即以这一去掉与 X_K 相应约束后所得到的 $n-1$ 次超静定结构作为按力法计算的基本体系。根据原结构在截面 K 处的已知位移条件，可建立如下的力法典型方程

$$\delta_{KK}X_K + \Delta_{KP} = 0$$

故得

$$X_K = -\frac{\Delta_{KP}}{\delta_{KK}}$$

由位移互等定理，$\Delta_{KP} = \Delta_{PK}$，于是上式可改写成

$$X_K = -\frac{\Delta_{PK}}{\delta_{KK}}$$

式中 δ_{KK} 代表基本结构上由于 $\bar{X}_K = 1$ 的作用，在截面 K 处沿 X_K 方向所引起的相对位移如图 8.20(c)所示。这是一个常数且恒为正值。Δ_{PK} 代表由于 $\bar{X}_K = 1$ 的作用，在移动荷载 F_P 的方向上所引起的位移。它将随着 F_P=1 的位置不同而变化，其变化规律的图形如图 8.20(c)所示，即为基本结构由于 $\bar{X}_K = 1$ 的作用所引起的竖向位移图。由此可知，若将位移图 Δ_{PK} 的纵坐标乘上常数 $-\dfrac{1}{\delta_{KK}}$ 便得到所要求的 X_K 影响线，即 X_K 的影响线与位移 Δ_{PK} 图成正比。因此，位移 Δ_{PK} 图的轮廓即代表了 X_K 影响线的轮廓。

由于连续梁位移轮廓线一般可凭直观描绘出来，故依据上述机动法的原理，无须进行具体计算，即可迅速确定影响线的大致形状。注意到竖向位移 Δ_{PK} 图的纵坐标是以在梁轴线下方的为正，而 X_K 与 Δ_{PK} 反号，故在用机动法确定的 X_K 影响线的轮廓图中，应取梁轴线上方的纵坐标为正，下方的为负，如图 8.20(d)所示。

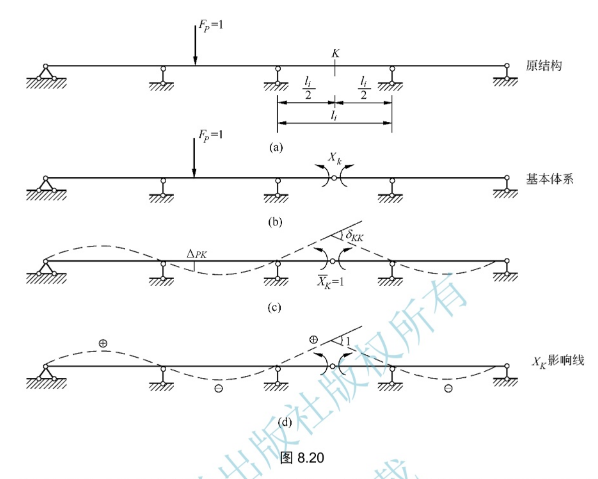


图 8.20

应用上述机动法作影响线的原理，即不难确定连续梁其他量值影响线的轮廓。图 8.21(a)、图 8.21(b)及图 8.21(c)分别绘出了连续梁剪力 F_{QK}、支座弯矩 M_C 和支座反力 F_{By} 影响线的轮廓。

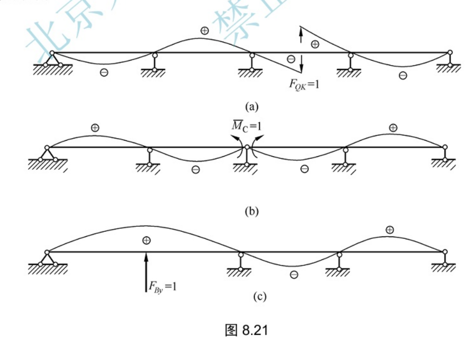


图 8.21

有了影响线的轮廓，就可方便地确定连续梁在可移动均布活荷载作用下的最不利分布情形，如图 8.22 所示，欲确定其跨中截面 K 的弯矩 M_K 的最不利荷载位置，可先绘制出

M_K影响线的轮廓图再根据式(8-16)，即 $S=qA_0$，可知将均布活荷载布满影响线正号面积的部分时，即为该量值最大值的最不利荷载位置；当均布活荷载布满影响线负号面积的部分时，则为该量值最小值(即最大负值)的最不利荷载位置，如图 8.22(b)、图 8.22(c)所示。同理可绘出 F_{QK}的最大值的最不利位置和最小值的最不利位置，如图 8.22(d)、图 8.22(e)所示。

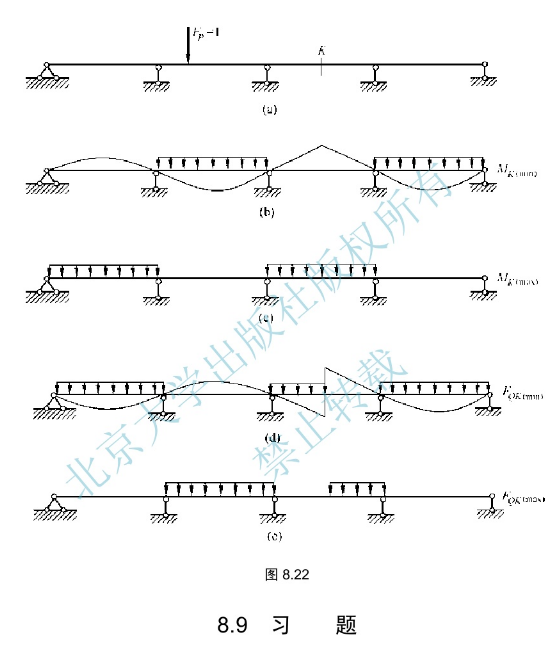


图 8.22

8.9 习　　题

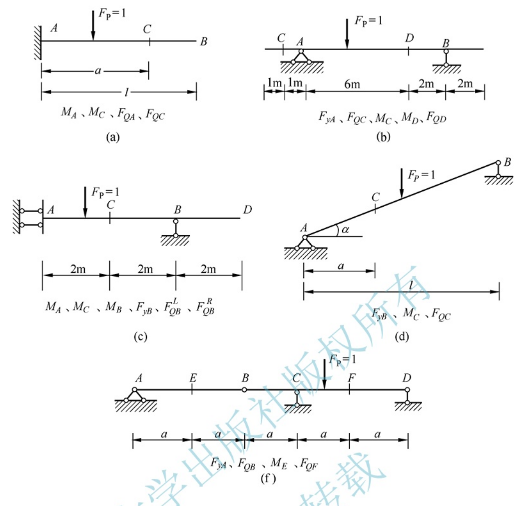
1. 影响线的含义是什么？它在某一位置的坐标代表什么物理意义？

2. 试从图形变量的含义、竖标的意义、量纲和图形的范围等方面说出影响线与内力图之间的区别。

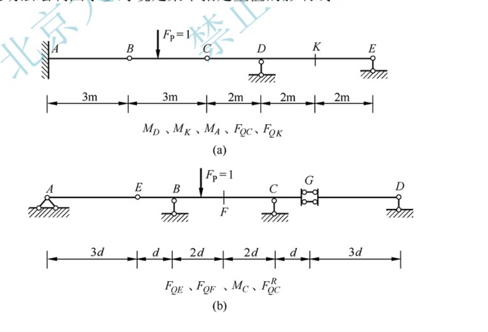
3. 试说明绘制静定结构影响线有哪些主要方法，并说明这些方法的主要步骤和各自需注意之处。

4. 试说明为什么静定结构的影响线都是由直线段所组成的。

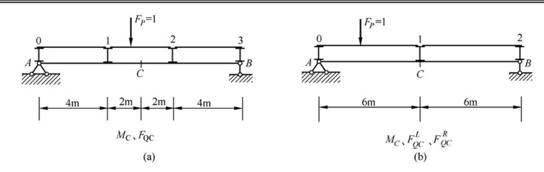
5. 试用静力法和机动法绘制图示结构中制定量值的影响线。



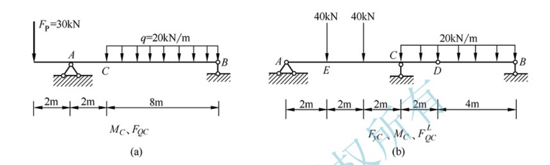
6. 试用机动法绘制图示多跨境定梁中指定量值的影响线。



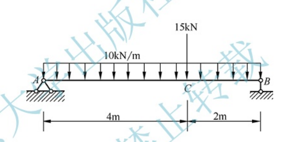
7. 试绘制图示结构指定量值的影响线，并加以比较。



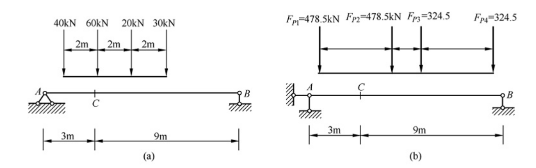
8. 试利用影响线求下列结构在图示固定荷载作用下指定量值的大小。



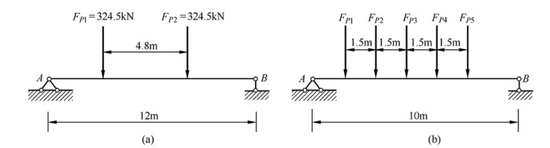
9. 试用影响线求图示简支梁在固定荷载作用下的F_{QC}^L 和F_{QC}^R 的值，并以静力平衡条件较核



10. 试求图示简支梁在移动荷载作用下截面 C 的最大弯矩、最大正剪力和最大负剪力。



11. 试求图示简支梁在移动荷载作用下的绝对最大弯矩。其中，图(b)中 F_{P1}=200kN、F_{P2}=300kN、F_{P3}=100kN、F_{P4}=100kN、F_{P5}=100kN。


F_{P1}=324.5kN
F_{P2}=324.5kN
4.8m
A
B
12m
(a)
F_{P1}
F_{P2}
F_{P3}
F_{P4}
F_{P5}
1.5m
1.5m
1.5m
1.5m
A
B
10m
(b)

